

**MASTER 1**  
**Métiers de l'Éducation, de l'Enseignement et de la Formation**  
**mention Second degré - Parcours Mathématiques**

**Licence 3 de mathématiques - PCAP**

**Écrit blanc du 29/11/2025**

—————  
**Durée : 4 heures**  
—————

*Calculatrice avec mémoire alphanumérique et/ou avec écran graphique qui dispose d'une fonctionnalité « **mode examen** » autorisée conformément à la circulaire MENH2119786C du 17 juin 2021.*

*Elle doit répondre aux spécificités suivantes :*

- *la neutralisation temporaire de l'accès à la mémoire de la calculatrice ou l'effacement définitif de cette mémoire ;*
- *le blocage de toute transmission de données, que ce soit par Wifi, Bluetooth ou par tout autre dispositif de communication à distance ;*
- *la présence d'un signal lumineux clignotant sur la tranche haute de la calculatrice, attestant du passage au « mode examen » ;*
- *la non-réversibilité du « mode examen » durant toute la durée de l'épreuve.*

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

*Ce sujet est formé de trois parties et comporte un document joint.*

*La clarté et la précision des raisonnements, la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

**Tournez la page S.V.P.**

---

## Partie 1 : Exercices de critique et rédaction mathématique

---

Pour chacun des exercices ci-après une réponse est fournie.

1. Les réponses fournies sont-elles exactes ? Justifier et préciser les éléments qui permettent de repérer les erreurs.
2. Quelles critiques peut-on faire à la rédaction de chaque réponse proposée ? Justifier.
3. Rédiger avec soin une réponse correcte pour chacun des exercices proposés.

### Exercice 1

Les propositions suivantes sont indépendantes. Pour chacune d'elles, préciser si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. Pour tout entier  $n$ , le nombre  $3n^2 + 3n + 6$  est divisible par 6.
2. Toute fonction qui n'admet pas de maximum admet un minimum.
3. Le triangle  $ABC$  ayant pour dimensions  $AB = 4$ ,  $AC = 6$  et  $BC = 7$  est rectangle en  $A$ .
4. Le nombre  $\sqrt{2}$  est décimal.

#### Réponse

1. *J'ai cherché sur tableur, et c'est vrai pour tous les entiers que j'ai testés. La proposition est vraie.*
2. *On a vu la fonction  $f(x) = x^2$ . Elle n'a pas de maximum et elle a bien un minimum. La proposition est vraie.*
3.  $AB^2 + AC^2 = 52$ , et  $\sqrt{52} \approx 7,2$ .  
 $7,2 \neq 7$ . *Donc le triangle n'est pas rectangle. La proposition est fausse.*
4.  $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ .  
*On a  $\sqrt{2} = 1, \dots$   
Si on fait  $1, \dots, 1 \times 1, \dots, 1$ , le nombre se termine par 1.  
Si on fait  $1, \dots, 2 \times 1, \dots, 2$ , le nombre se termine par 4.  
J'ai essayé toutes les possibilités et on ne peut jamais avoir 2.  
La proposition est fausse.*

### Exercice 2

Étudier la dérivabilité sur  $] -\pi, \pi[$  de la fonction réelle de la variable réelle  $f : x \mapsto |x - \sin x|$ .

#### Réponse

$g(x) = x - \sin x$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  mais on a  $g(0) = 0$ .  
Or on sait que la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.  
Donc  $f(x)$  n'est pas dérivable sur  $] -\pi, \pi[$  mais seulement sur  $] -\pi, \pi[ \setminus \{0\}$  (théorème de composition).

Tournez la page S.V.P.

### Exercice 3

On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n^2 + 1. \end{cases}$$

Étudier la monotonie de cette suite.

#### Réponse

Je note  $P_n$  : «  $u_{n+1} \leq u_n$  » ( $n \in \mathbb{N}$ ).

Supposons  $P_n$  vraie pour tout  $n$ . On a donc :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &\leq u_n \\ u_{n+1}^2 &\leq u_n^2 \\ \frac{1}{4}u_{n+1}^2 &\leq \frac{1}{4}u_n^2 \\ \frac{1}{4}u_{n+1}^2 + 1 &\leq \frac{1}{4}u_n^2 + 1 \\ u_{n+2} &\leq u_{n+1} \end{aligned}$$

Donc  $P_{n+1}$  est vraie.

Par récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$ .

La suite est donc décroissante.

Tournez la page S.V.P.

---

## Partie 2 : Questions sur le document joint au sujet

---

Les questions ci-dessous portent sur le document 1 joint qui aborde les notions de fonctions convexes et d'ensembles convexes. Les résultats du document 1 sont utilisables sans démonstration.

### 1. Fonctions convexes sur un intervalle

**Question 1.** On considère la parabole d'équation  $y = x^2$  dans un repère orthonormé. Soit  $a < b$ , on note  $A$  le point du plan de coordonnées  $(a, a^2)$ ,  $B$  celui de coordonnées  $(b, b^2)$  et  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2$ .

- i) Donner l'allure de la courbe de la fonction  $f$ .
- ii) Justifier que la corde  $[AB]$  est portée par la droite d'équation  $y = (a + b)x - ab$ .
- iii) Soit  $(x, y)$  dans  $\mathbb{R}^2$  tel que  $y = (a + b)x - ab$ . Factoriser  $f(x) - y$ .
- iv) En déduire que la fonction  $f$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ .

**Question 2.** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Formaliser, à l'aide d'une inégalité et des quantificateurs, la propriété suivante : sur l'intervalle  $I$ , la courbe représentative de  $f$  est en dessous de celle de  $g$ .

**Question 3.** Démontrer la remarque 1.

**Question 4.** Soit  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ . On suppose  $f$  convexe sur  $I$ . Démontrer que  $f$  est convexe sur tout intervalle contenu dans  $I$ .

**Question 5.** Démontrer que la fonction valeur absolue ( $x \mapsto |x|$ ) est convexe sur  $\mathbb{R}$ .

**Question 6.** Soit  $f$  une fonction convexe sur un intervalle  $I$ . La fonction  $|f|$  est-elle convexe sur cet intervalle ?

**Question 7.** Sur quels intervalles de  $\mathbb{R}$  la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x^3$  est-elle convexe ?

**Question 8.** Soit  $f$  une fonction convexe définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Démontrer que

$$\forall (a, b) \in I^2 \quad f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

**Question 9.** La démonstration de la proposition 2 est incomplète : terminer cette démonstration en traitant le cas  $f(a) > f(b)$ .

**Question 10.** Énoncer un analogue de la proposition 2 pour les fonctions concave. On ne demande pas de le démontrer.

**Question 11.** Démontrer la deuxième inégalité de la proposition 3.

**Question 12.** Démontrer que la fonction  $x \mapsto -\sin x$  est convexe sur  $[0, \pi]$ .

**Question 13.** Démontrer que

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \frac{2}{\pi} \leq \sin x \leq x.$$

On illustrera ces inégalités par une figure.

**Question 14.** Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $n$  un entier naturel non nul et  $x_1, \dots, x_n$  des éléments de  $I$ . On suppose que  $f$  est convexe sur  $I$ .

Démontrer l'inégalité

$$f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n}.$$

## 2. Parties convexes du plan

On note  $\mathcal{P}$  le plan muni d'un repère orthonormé.

**Question 15.** Pourquoi l'ensemble réduit à un point est-il une partie convexe du plan ?

**Question 16.** Dessiner l'ensemble du plan  $\mathcal{P}$  formé par les points  $M$  de coordonnées  $(x, y)$  vérifiant  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ . Démontrer que cet ensemble n'est pas convexe.

**Question 17.** La réunion de parties convexes est-elle une partie convexe ?

**Question 18.** Donner une démonstration de la proposition 5.

**Question 19.** Soient  $A$  et  $B$  points de  $\mathcal{P}$ . Démontrer que l'enveloppe convexe de  $\{A, B\}$  est le segment  $[AB]$ .

**Question 20.** Soient  $A, B, C$  trois points de  $\mathcal{P}$  non colinéaires. Quelle est l'enveloppe convexe de  $\{A, B, C\}$  ? Justifier (on pourra utiliser les résultats cités dans le document 1).

**Question 21.** Soient  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  deux droites du plan. Quelle est l'enveloppe convexe de  $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ . Justifier.

Tournez la page S.V.P.

---

## Partie 3 : Un exercice utilisant les barycentres

---

**Question A.** Proposer une solution détaillée de l'exercice ci-dessous.

**Question B.** Énoncer les propriétés des barycentres utilisées dans cet exercice.

**Question C.** Quelle réponse pourrait-on faire à un élève qui demanderait comment traiter la question 2) de l'exercice si les coefficients n'étaient pas fournis ?

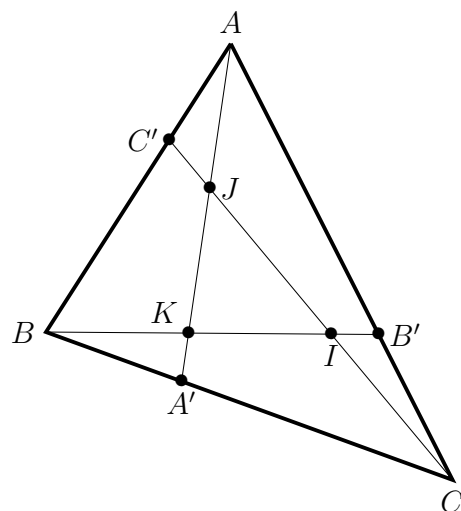
### L'exercice

Soit  $ABC$  un triangle du plan.

Les points  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  sont respectivement définis par  $\overrightarrow{AC'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BA'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{CB'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$ .

Les droites  $(AA')$  et  $(BB')$  se coupent en un point  $K$ , les droites  $(BB')$  et  $(CC')$  se coupent en un point  $I$  et les droites  $(AA')$  et  $(CC')$  en un point  $J$ .

- 1) Écrire  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  comme barycentres des points  $A$ ,  $B$  et  $C$ .
- 2) Montrer que le point  $I$  est barycentre de  $(A, 2)$ ,  $(B, 1)$  et  $(C, 4)$ .
- 3) Définir de même  $J$  et  $K$  comme barycentres de  $A$ ,  $B$  et  $C$ .
- 4) Montrer que les points  $I$ ,  $J$  et  $K$  sont respectivement les milieux de  $[CJ]$ ,  $[AK]$  et  $[BI]$ .



**Fin de l'épreuve.**

# Document joint

## Introduction aux fonctions convexes et parties convexes du plan

La notion de convexité, au carrefour de l'analyse et de la géométrie, est très utilisée en modélisation dans de nombreux domaines scientifiques. Pour résoudre des problématiques d'optimisation, elle s'avère un outil très efficace pour garantir l'existence d'extremums comme pour obtenir des inégalités.

Ce document comprend deux parties. Dans la première, on étudie les propriétés des fonctions convexes sur un intervalle. La deuxième, quant à elle, est consacrée aux parties dites convexes du plan et du lien qu'elles peuvent avoir avec les fonctions convexes. Dans ce document  $\mathcal{P}$  désigne le plan rapporté à un repère orthonormé.

### 1 - Fonctions convexes sur un intervalle

Dans la suite  $I$  désigne, sauf mention expresse du contraire, un intervalle de  $\mathbb{R}$  non réduit à un point.<sup>1</sup>

Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ . On désigne par  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans le plan.

Soient  $A(a, f(a))$  et  $B(b, f(b))$  deux points distincts de  $\mathcal{C}_f$ . On rappelle que la droite  $(AB)$  est dite *droite sécante* à  $\mathcal{C}_f$  et que le segment  $[AB]$  est la *corde* de l'arc  $\widehat{AB}$  de  $\mathcal{C}_f$ . On rappelle aussi que le segment d'extrémités  $A$  et  $B$  peut être décrit comme l'ensemble

$$\{M \in \mathcal{P}, \exists \lambda \in [0, 1], M = \lambda A + (1 - \lambda)B\}$$

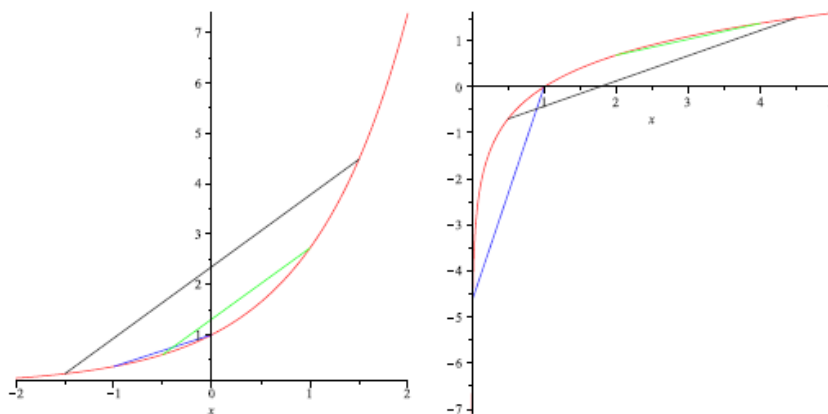
Dans cette section, après avoir donné quelques définitions et exemples de fonctions convexes, on étudiera quelques propriétés de ces fonctions.

**Définition 1** Soit  $f$  une fonction définie sur  $I$ . On dit que  $f$  est convexe sur  $I$  si tout arc de sa courbe représentative sur  $I$  est au-dessous de la corde correspondante.

La fonction est dite concave si tout arc est au-dessus de la corde correspondante ou encore si  $-f$  est convexe.

#### Exemple 1

Voici ci-après les tracés des courbes représentatives d'une fonction convexe (à gauche du dessin) et d'une autre concave (à droite du dessin).



1. Rappelons qu'une partie non vide  $I$  de  $\mathbb{R}$  est un intervalle si, pour tout  $(x, y)$  dans  $I^2$  avec  $x \leq y$ , l'ensemble (noté  $[x, y]$ ) des éléments compris entre  $x$  et  $y$  est dans  $I$ .

Dans la suite nous traitons le cas des fonctions convexes. La définition ci-dessus (dans le cas convexe) est équivalente à la définition suivante.

**Définition 2** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une fonction définie sur  $I$ . On dit que  $f$  est convexe sur  $I$  si, quels que soient les réels  $x, x_1, x_2$  dans  $I$  tels que  $x_1 < x < x_2$ , on a

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1). \quad (1)$$

**Remarque 1**

Une équation de la sécante à  $\mathcal{C}_f$  passant par les points de coordonnées  $(x_1, f(x_1))$  et  $(x_2, f(x_2))$  est  $y = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ .

**Remarque 2**

Dire que la fonction  $f$  est convexe sur l'intervalle  $I$  revient à dire que

$$\forall t \in [0, 1] \quad \forall x_1 \in I \quad \forall x_2 \in I \quad f(tx_1 + (1 - t)x_2) \leq tf(x_1) + (1 - t)f(x_2).$$

La proposition suivante précise les positions relatives de la courbe représentative d'une fonction convexe et de ses sécantes.

**Proposition 1**

Soit  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $f$  est convexe sur  $I$ . Soient  $x_1$  et  $x_2$  dans  $I$  avec  $x_1 < x_2$ . La courbe  $\mathcal{C}_f$  est alors située en dessous de sa sécante sur  $[x_1, x_2]$  et au-dessus de sa sécante à l'extérieur de  $[x_1, x_2]$ .

Comme conséquence de ce qui précède, on obtient le résultat suivant relatif au calcul des limites des fonctions convexes en l'infini.

**Proposition 2**

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  convexe sur  $\mathbb{R}$  tout entier. Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels tels que  $a < b$ .

1. Si  $f(a) < f(b)$  alors  $f(x)$  tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .
2. Si  $f(a) > f(b)$  alors  $f(x)$  tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $-\infty$ .

**Démonstration (incomplète)**

On suppose que  $f(a) < f(b)$ . Comme  $f$  est convexe sur l'intervalle  $[a, b]$  sa courbe représentative est au-dessus de sa sécante passant par  $(a, f(a))$  et  $(b, f(b))$ . Ce qui se traduit, en particulier, par l'assertion

$$\forall x \geq b \quad f(x) \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b) + f(b).$$

Or  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0$ . Donc le terme de droite tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  et donc  $f(x)$  tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

Le théorème suivant donne une caractérisation des fonctions convexes en termes de « variations des pentes ».

**Théorème 1 (Convexité et taux d'accroissement)**

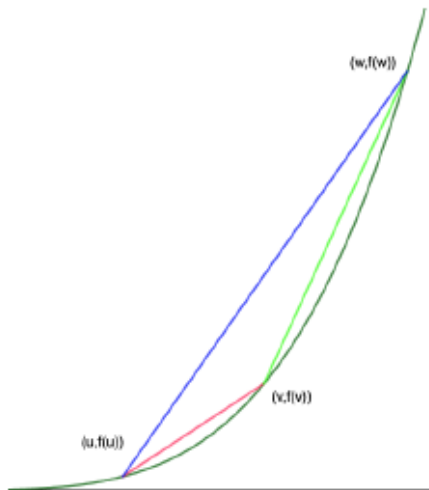
Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  non réduit à un point et soit  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ . Pour  $a$  dans

$I$ , on désigne par  $\Phi_a$  la fonction de  $I \setminus \{a\}$  dans  $\mathbb{R}$  qui à tout  $x$  associe le nombre réel

$$\Phi_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

La fonction  $f$  est alors convexe sur  $I$  si et seulement si  $\Phi_a$  est croissante sur  $I$ .

Le résultat qui suit, appelé « lemme des trois pentes » ou « lemme des trois cordes » est une conséquence du théorème précédent. Il permet de comparer les pentes de trois cordes « successives » de la courbe représentative d'une fonction convexe (voir la figure ci-dessous).



**Proposition 3** Soit  $f$  une fonction convexe définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Si  $u, v$  et  $w$  sont trois nombres réels de  $I$  tels que  $u < v < w$ , alors

$$\frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leq \frac{f(w) - f(u)}{w - u} \leq \frac{f(w) - f(v)}{w - v}.$$

### Démonstration

On utilise ce qui précède en gardant les notations et hypothèses de la proposition. La fonction

$$\Phi_u : x \mapsto \frac{f(x) - f(u)}{x - u}$$

étant croissante sur  $I$  privé de  $u$ , on a  $\Phi_u(v) \leq \Phi_u(w)$  puisque  $v < w$ . D'où la première inégalité. La deuxième inégalité est similaire.

Le théorème suivant fournit des conditions suffisantes pour qu'une fonction assez régulière sur un intervalle  $I$  soit convexe.

### Théorème 2 (Convexité et dérivation)

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une fonction définie sur  $I$ . Pour que  $f$  soit convexe sur l'intervalle  $I$  il suffit que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :

- (i) la fonction  $f$  est dérivable sur  $I$  et  $f'$  est croissante ;
- (ii) la fonction  $f$  est deux fois dérivable sur l'intervalle  $I$  et  $f''$  est positive.

Dans ces deux cas, la courbe représentative de  $f$  est entièrement au-dessus de chacune de ses tangentes.

### Remarque 3

La propriété relative aux tangentes se traduit par

$$\forall (x, x_0) \in I^2 \quad f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Elle s'établit aisément en étudiant les variations de la fonction  $h$  définie sur l'intervalle  $I$  par :

$$h(x) = f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)).$$

### Remarque 4

Si on suppose que la fonction  $f$ , de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ , est dérivable alors les conditions suffisantes sont également nécessaires. Plus précisément, on montre que la fonction  $f$  (supposée dérivable) est convexe sur  $I$  si, et seulement si,  $f'$  est croissante sur  $I$  (ce qui se traduit par le fait que la dérivée seconde est positive lorsque cette dérivée existe). Ce qui équivaut aussi au fait que  $\mathcal{C}_f$  est située au-dessus de ses tangentes.

### Exemples

Les fonctions suivantes sont convexes :  $x \mapsto (a+x)^r$ , avec  $r \in \mathbb{Z}$  et  $a \in \mathbb{R}$ , sur l'intervalle  $] -a, +\infty[$ ;  $x \mapsto e^{mx}$ , avec  $m \in \mathbb{R}$ , sur  $\mathbb{R}$ ;  $x \mapsto -\ln x$  sur  $]0, +\infty[$ .

### Application à la recherche d'inégalités

Les relations qui décrivent les positions relatives de la courbe représentative et des cordes sont à l'origine de très nombreuses inégalités. On pourra établir, à titre d'exemple :

1.  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 + x \leq e^x,$
2.  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 - x \leq e^{-x},$
3.  $\forall x > 1, \quad \ln(1 + x) \leq x.$

Terminons cette partie par un résultat important qui permet d'établir de nombreuses inégalités. Par exemple celle qui permet de comparer les moyennes arithmétique et géométrique.

### Théorème 3 (Inégalités de Jensen)

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $n$  un entier naturel non nul et  $x_1, \dots, x_n$  des éléments de  $I$ . On suppose que  $f$  est convexe sur  $I$ . Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  des nombres réels dans l'intervalle  $[0, 1]$  tels que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ . On a alors :

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

## 2 - Parties convexes du plan

**Définition 3** Soit  $X$  une partie de  $\mathcal{P}$ . On dit que  $X$  est convexe si elle est vide ou si, pour tous les points  $A$  et  $B$  de  $X$ , le segment d'extrémités  $A$  et  $B$  est contenu dans  $X$ .

### Exemples de parties convexes

1. L'ensemble vide et le plan sont des parties convexes du plan.
2. Un point (respectivement une droite) est une partie convexe du plan.

3. Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  et  $X = \{M(x, y) \in \mathcal{P}, y \geq ax + b\}$  le demi-plan supérieur délimité par la droite d'équation  $y = ax + b$ . Alors  $X$  est convexe.
4. Le disque unité de centre l'origine  $\{M(x, y) \in \mathcal{P}, x^2 + y^2 \leq 1\}$  est convexe.
5. La couronne  $\{M(x, y) \in \mathcal{P}, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$  n'est pas convexe.

**Proposition 4**

Soient  $C$  une partie convexe de  $\mathcal{P}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}_+^n$  tel que  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$  et  $M_1, \dots, M_n$  des points de  $C$ . Alors le point  $M = \alpha_1 M_1 + \dots + \alpha_n M_n$  est dans  $C$ .

Avec les mêmes notations, le point  $M$  ci-dessus est dit *combinaison convexe* des points  $M_1, \dots, M_n$ . La proposition signifie que les ensembles convexes sont stables par combinaison convexe.

La proposition qui suit permet de définir la plus petite partie convexe contenant une partie non vide du plan.

**Proposition 5**

Soit  $J$  un ensemble (d'indices) non vide. Soit, pour tout  $j$  dans  $J$ ,  $C_j$  une partie convexe du plan. L'ensemble  $\bigcap_{j \in J} C_j$  est une partie convexe du plan.

**Définition 4** Soit  $X$  une partie non vide de  $\mathcal{P}$ . L'intersection de toutes les parties convexes contenant  $X$  est alors une partie convexe. C'est la plus petite partie, au sens de l'inclusion, convexe et contenant  $X$ . On l'appelle enveloppe convexe de  $X$  et on la note  $C(X)$ .

**Lien entre fonctions convexes et parties convexes du plan**

Dans ce paragraphe, on fait le lien entre la convexité des fonctions réelles et des parties convexes du plan réel.

**Définition 5** Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une fonction définie sur  $I$ . On appelle *épigraphe* de  $f$  la partie du plan donnée par  $\{M(x, y) \in \mathcal{P}, y \geq f(x)\}$ .

**Notation**

L'épigraphe de  $f$  est noté  $\mathcal{E}(f)$ .

**Proposition 6**

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une fonction définie sur  $I$ . Pour que  $f$  soit convexe sur  $I$  il faut et il suffit que  $\mathcal{E}(f)$  soit une partie convexe du plan.