UNIVERSITÉ DE RENNES 1

MASTER
Métiers de l'Education, de l'Enseignement et de la Formation
mention Second degré

Parcours : MATHÉMATIQUES

CAPES blanc du 05/02/2022

Durée : 5 heures

Calculatrice avec mémoire alphanumérique et/ou avec écran graphique qui dispose d'une fonctionnalité « mode examen » autorisée conformément à la circulaire MENH2119786C du 17 juin 2021.
Elle doit répondre aux spécificités suivantes :

- *la neutralisation temporaire de l'accès à la mémoire de la calculatrice ou l'effacement définitif de cette mémoire ;*
- *le blocage de toute transmission de données, que ce soit par Wifi, Bluetooth ou par tout autre dispositif de communication à distance ;*
- *la présence d'un signal lumineux clignotant sur la tranche haute de la calculatrice, attestant du passage au « mode examen » ;*
- *la non-réversibilité du « mode examen » durant toute la durée de l'épreuve.*

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

Le dossier de ce sujet comprend deux parties totalement indépendantes.
La clarté et la précision des raisonnements, la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

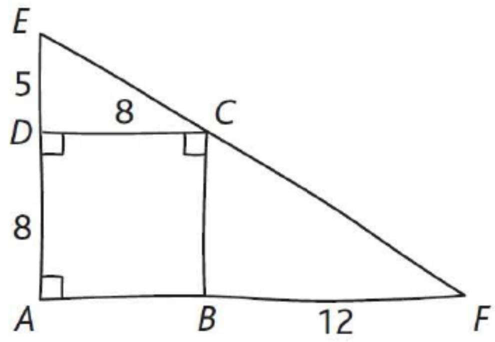
Tournez la page S.V.P.

Dossier, partie 1 : problèmes d'alignement

Énoncé de l'exercice 1

La figure ci-contre est dessinée à main levée.
Les points A, D, E et A, B, F sont alignés.
Les dimensions sont exprimées en cm.

Les points E, C et F sont-ils alignés ?



D'après manuel Déclic seconde

Réponses apportées par trois élèves

Élève 1

Dans le triangle rectangle DEC, avec le théorème de Pythagore :
on a $EC^2 = DC^2 + DE^2 = 8^2 + 5^2 = 89$*, d'où EC=9,4.*
Dans le triangle rectangle CFB, on a $CF^2 = BF^2 + BC^2 = 12^2 + 8^2 = 208$*, d'où* $CF = 14,4$.
Dans le triangle rectangle FAE : $EF^2 = AF^2 + AE^2 = 20^2 + 13^2 = 569$*, d'où* $EF = 23,8$.
On a 9,4+14,4=23,8, c'est-à-dire $CF + EC = EF$.
Donc E, C et F sont alignés.

Élève 2

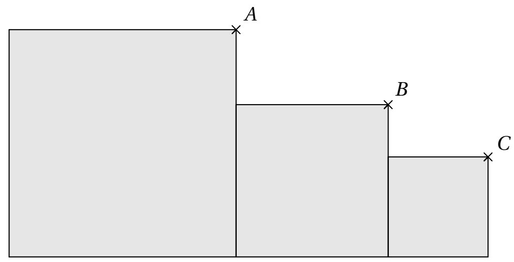
J'applique le théorème de Thalès qui dit que $\frac{FB}{FA} = \frac{BC}{AE}$*, donc* $\frac{12}{20} = \frac{8}{13}$*, donc* $156 = 160$.
C'est faux, j'ai dû faire une erreur.

Élève 3

$\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix} 8-0 \\ 8-13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 20-0 \\ 0-13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -13 \end{pmatrix}$.
$\frac{8}{-5} = \frac{20}{-13}$*, donc* $-1,5 \neq -1,6$.
donc $\overrightarrow{EC}$ *et* $\overrightarrow{EF}$ *ne sont pas colinéaires, donc les points E, C et F ne sont pas alignés.*

Énoncé de l'exercice 2

On considère la figure ci-contre formée de 3 carrés.
Le premier carré a pour côté 1.
Le côté du deuxième carré est une réduction du côté du premier carré et le côté du troisième carré est une réduction du côté du deuxième carré. Les deux coefficients de réduction sont égaux.

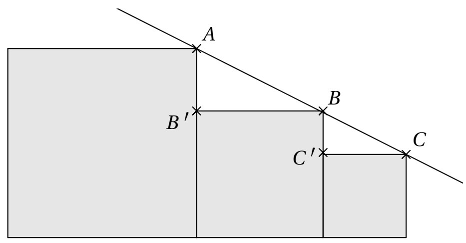


Les points A, B et C sont-ils alignés ?

Les réponses de deux élèves de seconde

Élève 1

J'ai placé B' et C' et j'ai tracé la droite (AC).
Dans le triangle BC'C rectangle en C', les angles $\widehat{C'BC}$ *et* $\widehat{C'CB}$ *sont complémentaires.*
$\widehat{C'BB'} = 90°$ *donc* $\widehat{B'BA}$ *est complémentaire à* $\widehat{C'BC}$.
Ce qui fait que $\widehat{B'BA} = \widehat{C'CB}$.
Donc les coefficients directeurs sont égaux et les points A, B et C sont alignés.



Élève 2

On utilise les coordonnées des points A, B, C qui sont les longueurs des côtés des carrés.
On a A(1 ;1), B $\left(\frac{5}{3};\frac{2}{3}\right)$. *Après j'utilise les vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{BC}$.
On regarde s'ils sont colinéaires : $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}$ *où k est le coefficient mais je ne trouve pas.*

Questions au candidat

I- Analyse des productions et solutions des exercices

1- Analyser les solutions apportées par les trois élèves à l'exercice 1 en mettant en évidence leurs réussites et leurs erreurs éventuelles.

2- Préciser, pour chaque élève, l'aide qui pourrait lui permettre de mener à bien sa démarche.

3- Rédiger une correction de l'exercice 1 telle qu'elle devrait figurer dans des cahiers d'élèves. On proposera deux méthodes distinctes en indiquant à chaque fois le niveau de classe considéré.

4- Analyser les solutions apportées par les deux élèves à l'exercice 2 en mettant en évidence leurs réussites et leurs erreurs éventuelles.

5- Proposer, en précisant le niveau auquel on se place, une résolution de l'exercice 2.

II- Comparaison des deux exercices

1- Expliquer ce qu'est une tâche à prise d'initiative (TAPI).

2- Les deux exercices proposés entrent-ils dans ce cadre ? Justifier la réponse.

3- Quel peut être l'apport du dessin à main levée proposé dans l'énoncé de l'exercice 1 ? Comparer avec l'exercice 2.

III- Problèmes d'alignement

Comment montrer l'alignement de trois points distincts A, B et C du plan ?
On proposera différentes méthodes en précisant le niveau concerné.

IV- Compléments

1- Qu'est-ce qu'une homothétie du plan (donner la définition) ?
Quelles en sont les principales propriétés ?

2- Proposer l'énoncé d'un exercice faisant appel à la notion d'homothétie et permettant de répondre à la question de l'exercice 2. On donnera à la suite une correction de cet exercice.

Dossier, partie 2 : suites numériques

Programme de mathématiques de première générale

Suites numériques, modèles discrets

Contenus

- Exemples de modes de génération d'une suite : explicite $u_n = f(n)$, par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, par un algorithme, par des motifs géométriques. Notations : $u(n)$, u_n, $(u(n))$, (u_n).
- Suites arithmétiques : exemples, définition, calcul du terme général. Lien avec l'étude d'évolutions successives à accroissements constants. Lien avec les fonctions affines. Calcul de $1 + 2 + \cdots + n$.
- Suites géométriques : exemples, définition, calcul du terme général. Lien avec l'étude d'évolutions successives à taux constant. Lien avec la fonction exponentielle. Calcul de $1 + q + \cdots + q^n$.
- Sens de variation d'une suite.
- Sur des exemples, introduction intuitive de la notion de limite, finie ou infinie, d'une suite.

...

Exemples d'algorithmes

- Calcul de termes d'une suite, de sommes de termes, de seuil.
- Calcul de factorielle.
- Liste des premiers termes d'une suite : suites de Syracuse, suite de Fibonacci.

...

Programme de spécialité mathématiques de terminale de l'enseignement général

Suites

Contenus

- La suite (u_n) tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $[A, +\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang. Cas des suites croissantes non majorées. Suite tendant vers $-\infty$.
- La suite (u_n) converge vers le nombre réel ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.
- Limites et comparaison. Théorèmes des gendarmes.
- Opérations sur les limites.
- Comportement d'une suite géométrique (q^n) où q est un nombre réel.
- Théorème admis : toute suite croissante majorée (ou décroissante minorée) converge.

Capacités attendues

- Établir la convergence d'une suite, ou sa divergence vers $+\infty$ ou $-\infty$.
- Raisonner par récurrence pour établir une propriété d'une suite.
- Étudier des phénomènes d'évolution modélisables par une suite.

Démonstrations

- Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
- Limite de (q^n), après démonstration par récurrence de l'inégalité de Bernoulli.
- Divergence vers $+\infty$ d'une suite minorée par une suite divergeant vers $+\infty$.

...

Énoncé de l'exercice 3

Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) définie par :

$$u_1 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}}, \text{ pour tout } n \geqslant 1.$$

Les réponses de trois élèves de terminale

Élève 1

Je considère la fonction $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Je calcule la dérivée et j'obtiens $f'(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

La fonction f' est clairement positive pour toutes les valeurs de x.

J'en déduis que la fonction f est croissante et, par conséquent, que la suite (u_n) est croissante.

Élève 2

À l'aide de ma calculatrice, j'ai calculé les premiers termes de la suite.

J'ai obtenu $u_2 = 0,71$, $u_3 = 0,58$ et $u_4 = 0,5$.

Je pense donc que la suite (u_n) est décroissante.

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}} - u_n = \dfrac{u_n - u_n \times \sqrt{u_n^2+1}}{\sqrt{u_n^2+1}}$, *je n'arrive pas à conclure.*

Élève 3

J'ai calculé les premiers termes : $u_1 = 1$, $u_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $u_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ *et* $u_4 = \dfrac{1}{\sqrt{4}}$.

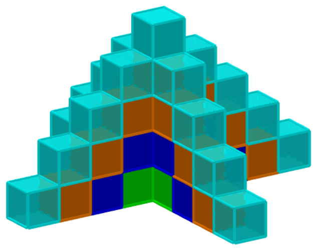
On voit que $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Pour tout entier n non nul, $\sqrt{n} \leqslant \sqrt{n+1}$ *par conséquent* $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

J'en déduis que la suite (u_n) est décroissante.

Énoncé de l'exercice 4

On empile des cubes selon le modèle ci-contre :



1- Combien de cubes sont utilisés si on construit ainsi dix étages ?

2- Combien d'étages peut-on construire au maximum avec 2 022 cubes, et combien restera-t-il de cubes ?

Questions au candidat

V- Analyse des productions et solutions des exercices

1- Analyser les solutions apportées par les trois élèves à l'exercice 3 en mettant en évidence leurs réussites et leurs erreurs éventuelles. On mettra cette analyse en perspective au regard des trois compétences « chercher », « raisonner » et « communiquer ».

2- Préciser, pour chaque élève, les conseils et l'accompagnement que l'on pourrait prévoir.

3- Rédiger une solution de l'exercice 3 telle qu'elle pourrait être présentée à une classe de terminale dans le cadre de l'enseignement de spécialité mathématiques. On détaillera la réponse en prenant soin de donner toutes les justifications nécessaires.

4- Proposer, en précisant le niveau auquel on se place, une résolution de l'exercice 4.

VI- Les exercices et les programmes

1- Dans quel(s) cadre(s) et à quel(s) niveau(x) peut-on proposer l'exercice 4 ?

2- Les deux exercices proposés entrent-ils dans le cadre des programmes donnés dans ce sujet ? Justifier la réponse.

3- Quelles compétences peuvent-ils permettre de développer ?

VII- Les suites au lycée

1- Démontrer que toute suite réelle croissante non majorée tend vers $+\infty$.

2- Démontrer par récurrence que pour tout réel $x > -1$ on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad (1+x)^n \geqslant 1 + nx \qquad \textit{(inégalité de Bernoulli)}$$

En déduire le comportement à l'infini d'une suite géométrique (q^n) où q est un nombre réel.

VIII- Compléments pour l'exercice 3

1- Démontrer que la suite de l'exercice 3 est telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

2- Quel intérêt pédagogique peut avoir la modification du terme initial u_1 ?

3- Discuter, suivant les valeurs de u_1, la nature de la suite (u_n). Illustrer graphiquement cette étude.

4- On suppose $u_1 = -2$. Écrire un algorithme donnant le plus petit entier naturel n pour lequel $|u_n| < 10^{-2}$.