MASTER 1
Métiers de l'Education, de l'Enseignement et de la Formation
mention Second degré - Parcours Mathématiques

Licence 3 de mathématiques - PCAP

Écrit blanc du 25/10/2025

Durée : 4 heures

Calculatrice avec mémoire alphanumérique et/ou avec écran graphique qui dispose d'une fonctionnalité **« mode examen »** *autorisée conformément à la circulaire MENH2119786C du 17 juin 2021.*
Elle doit répondre aux spécificités suivantes :

- *la neutralisation temporaire de l'accès à la mémoire de la calculatrice ou l'effacement définitif de cette mémoire ;*
- *le blocage de toute transmission de données, que ce soit par Wifi, Bluetooth ou par tout autre dispositif de communication à distance ;*
- *la* **présence d'un signal lumineux clignotant** *sur la tranche haute de la calculatrice, attestant du passage au « mode examen » ;*
- *la non-réversibilité du « mode examen » durant toute la durée de l'épreuve.*

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

Ce sujet est formé de quatre parties indépendantes.
La clarté et la précision des raisonnements, la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Tournez la page S.V.P.

Partie I : VRAI -FAUX

Pour chacun des items suivants, préciser si l'assertion finale est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée. Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

Arithmétique.

1. Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ l'application définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f(n) = 8n^2 - 10n + 3$.
   L'application f est injective.

2. Soit n un entier strictement positif.
   La somme des carrés des n premiers entiers naturels non nuls est égale à $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Équations différentielles.

3. Soit a un réel strictement positif.
   Soit f une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + 2ay' + a^2 y = 0$. Alors $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.
4. Soit b une fonction continue sur $\mathbb{R}$. L'équation différentielle
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad xy'(x) + b(x)y(x) = 0$$
   admet toujours comme ensemble de solutions réelles une droite vectorielle.

Raisonnement/définitions.

5. On désigne par F un ensemble de fonctions définies sur $\mathbb{R}$. On donne deux assertions P et Q :
$$(P) : \forall f \in F \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 0$$
$$(Q) : \exists x \in \mathbb{R} \quad \forall f \in F \quad f(x) = 0$$
   Ces deux assertions sont équivalentes.
6. Soient $a, b, c \in \mathbb{N}$: au moins deux d'entre eux sont congrus modulo 2.

Tournez la page S.V.P.

Partie II

On pose, lorsque ces expressions ont un sens :

$$f(x) = \frac{1}{\ln(x)} \text{ et } F(x) = \int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t$$

1. Démontrer que F est bien définie sur $]0, 1/2[\cup]1, +\infty[$.

Dans la suite, on note $D =]0, 1/2[\cup]1, +\infty[$.

2. (a) Justifier que la fonction f admet des primitives sur $]0, 1[$.

   (b) Démontrer alors que F est dérivable sur $]0, 1/2[$ avec :

$$\forall x \in]0, 1/2[\qquad F'(x) = \frac{\ln(x) - \ln(2)}{\ln(x)\ln(2x)}.$$

   (c) Proposer, en justifiant soigneusement, un résultat analogue sur $]1, +\infty[$.

3. Dresser le tableau de variations de F sur D, à ce stade sans chercher les limites.

4. (a) Démontrer :

$$\forall x \in]1, +\infty[\qquad \frac{x}{\ln(2x)} \leqslant F(x) \leqslant \frac{x}{\ln(x)}$$

   (b) Déterminer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

   (c) Préciser aussi la limite de $\dfrac{F(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

5. (a) Calculer $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t\ln(t)}\mathrm{d}t$ pour tout x dans D.

   (b) En déduire que la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers 1 vaut $+\infty$.

   (c) Démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}} F(x) = -\infty$.

6. (a) Démontrer :

$$\forall x \in]0, 1/2[\qquad \frac{x}{\ln(2x)} \leqslant F(x) \leqslant \frac{x}{\ln(x)}$$

   (b) Démontrer que F est prolongeable par continuité en 0.

7. Donner l'allure de la courbe représentative de F sur D.

8. On considère maintenant une fonction φ continue sur $[2, +\infty[$ et on suppose que $\displaystyle\int_2^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente.

   (a) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

   (b) Démontrer que si u et v sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[2, +\infty[$ et telles que

$$\lim_{x\to+\infty} u(x) = \lim_{x\to+\infty} v(x) = +\infty,$$

   alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_{u(x)}^{v(x)} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

   (c) Établir alors, en utilisant les questions précédentes, que la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ est d'intégrale divergente sur $[2, +\infty[$.

Tournez la page S.V.P.

Partie III

On note $2\pi\mathbb{Z}$ l'ensemble des multiples entiers de 2π. Soit θ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer :
$$e^{\frac{i\theta}{2}} = e^{\frac{-i\theta}{2}} \iff \theta \in 2\pi\mathbb{Z}$$

   Pour un entier naturel non nul, on pose :
$$E_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta},$$
$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \cos k\theta \quad \text{et} \quad T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin k\theta$$

2. On suppose que θ n'est pas dans $2\pi\mathbb{Z}$.
   (a) Justifier les égalités :
$$E_n = \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} = \frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} e^{\frac{in\theta}{2}}.$$
   (b) Calculer S_n et T_n.
   (c) Démontrer que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} T_n = 0$.
3. Que peut-on dire de S_n et T_n si θ est dans $2\pi\mathbb{Z}$?

   Dans toute la suite on suppose que θ n'est pas dans $2\pi\mathbb{Z}$. On considère $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel et orienté par la base canonique. Soit r une rotation de $\mathbb{R}^2$ dont on note l'angle θ ; on rappelle que dans toute base orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$, la matrice de r est
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$
   Si k est un entier naturel, on note r^k l'itérée k-ième de r, c'est-à-dire l'application définie par récurrence sur k par :
   Si $k = 0$, r^k est l'identité de $\mathbb{R}^2$.
   Si $k > 0$, $r^k = r \circ r^{(k-1)}$.

4. Soit x un vecteur de $\mathbb{R}^2$. Déterminer la limite dans $\mathbb{R}^2$ de $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k(x)$.

Partie IV : codage et décodage d'un message chiffré

Partie A : équation diophantienne

Dans cette partie, on considère l'équation diophantienne $(E) : 17x - 26y = 1$ d'inconnue $(x;y) \in \mathbb{Z}^2$.

1. Déterminer une solution particulière de (E).
2. Résoudre l'équation (E).
3. Démontrer qu'il existe un unique couple solution $(u;v)$ de (E) tel que $0 \leqslant u < 26$.

Tournez la page S.V.P.

4. Démontrer que, pour tous nombres entiers relatifs p et q, on a l'équivalence :

$$17p \equiv q\ [26] \iff p \equiv 23q\ [26].$$

Codage :

Soient a un entier non nul et b un entier.

La fonction f, qui à tout entier n compris entre 0 et 25 associe $f(n) = an + b$, est appelée fonction de codage.

Le codage d'une lettre par cette fonction se fait comme suit :

- Remplacer la lettre par son équivalent numérique n donné par le tableau ci-dessous
- Calculer le reste r de la division euclidienne de $f(n) = an + b$ par 26
- Remplacer l'entier obtenu r par la lettre correspondante dans le tableau

A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	**L**	**M**
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	**O**	**P**	**Q**	**R**	**S**	**T**	**U**	**V**	**W**	**X**	**Y**	**Z**
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Le codage d'un mot consiste alors à coder chacune de ses lettres.

Partie B : un exemple de codage

Dans cette partie, la fonction de codage f est définie par $f(n) = 17n + 22$ où n est un entier compris entre 0 et 25.

Pour le codage de la lettre H, correspondant au nombre $n = 7$, on a : $f(7) = 17\times 7+22 = 141 = 5\times 26+11$, d'où $r = 11$.

Ainsi la lettre H sera codée par la lettre L, correspondant au nombre 11.

1. Coder le mot « HUIT » en utilisant la fonction f.
2. a. Déterminer l'expression d'une fonction de décodage g telle que : $r \equiv f(n)\ [26] \iff n \equiv g(r)\ [26]$

   b. Décoder alors le mot « QWXA »

Partie C : cas général

Soient a un entier non nul et b un entier.

Dans cette partie, la fonction de codage est définie par $f(n) = an + b$, pout tout entier n compris entre 0 et 25.

On dit que f admet une fonction de décodage g, si deux lettres distinctes sont codées par des lettres distinctes, c'est-à-dire si : pour tout couple d'entiers (n_1, n_2) compris entre 0 et 25,

$$f(n_1) \equiv f(n_2)\ [26] \Longrightarrow n_1 = n_2.$$

On admet qu'il existe alors une fonction affine de décodage g, définie pour tout entier r par $g(r) = n$ où n est un entier tel que $f(n) \equiv r\ [26]$.

1. Démontrer que si a et 26 sont premiers entre eux alors f admet une fonction de décodage.
2. Soit une fonction de codage f telle que a et 26 sont premiers entre eux.

   a. Démontrer qu'il existe un entier relatif u tel que $au \equiv 1\ [26]$.

   b. Déterminer en fonction de u une fonction de décodage g.

   c. La fonction de décodage est-elle unique ?

Fin de l'épreuve.