MASTER 1
Métiers de l'Education, de l'Enseignement et de la Formation
mention Second degré

Parcours : MATHÉMATIQUES

Écrit blanc du 19/10/2024

Durée : 5 heures

Calculatrice avec mémoire alphanumérique et/ou avec écran graphique qui dispose d'une fonctionnalité **« mode examen »** *autorisée conformément à la circulaire MENH2119786C du 17 juin 2021.*
Elle doit répondre aux spécificités suivantes :

- *la neutralisation temporaire de l'accès à la mémoire de la calculatrice ou l'effacement définitif de cette mémoire ;*
- *le blocage de toute transmission de données, que ce soit par Wifi, Bluetooth ou par tout autre dispositif de communication à distance ;*
- *la* **présence d'un signal lumineux clignotant** *sur la tranche haute de la calculatrice, attestant du passage au « mode examen » ;*
- *la non-réversibilité du « mode examen » durant toute la durée de l'épreuve.*

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

Ce sujet est constitué de trois problèmes totalement indépendants.
La clarté et la précision des raisonnements, la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Tournez la page S.V.P.

Problème n° 1 : VRAI -FAUX

Préciser si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse, puis justifier la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1) On appelle *mot* toute liste de dix chiffres. (Pour rappel, les chiffres sont 0,1,2,3,4,5,6,7,8 et 9.)
PROPOSITION : *Le nombre de mots comportant à la fois cinq « 0 » et cinq « 1 » est* $\dbinom{10}{5}$.

2) A, B et C désignent trois évènements correspondant à une même expérience aléatoire.
PROPOSITION : *Dire que exactement deux évènements parmi A, B et C sont réalisés signifie que le résultat de l'expérience est dans* $(A \cup B) \cup (B \cup C) \cup (C \cup A)$.

3) Dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$, on considère deux évènements A et B tels que $\mathbb{P}(A) = 0,6$ et $\mathbb{P}(B) = 0,5$.
PROPOSITION : *Les évènements A et B ne sont pas incompatibles.*

4) Une urne contient quatre boules bleues et trois boules rouges indiscernables au toucher. On tire trois boules dans l'urne, successivement et sans remise.
PROPOSITION : *La probabilité que les deux premières boules tirées soient bleues et la troisième soit rouge est égale à* $\dfrac{1}{6}$.

5) Soit m un réel. On considère le système : $\left\{\begin{array}{rcr} x+y+z & = & 4 \\ x+my+3z & = & -1 \\ x+3y+2z & = & 1 \end{array}\right.$
PROPOSITION : *Pour toute valeur de m, ce système a au moins une solution.*

6) PROPOSITION : *Il est financièrement toujours plus intéressant de demander une réduction de 10 % du prix d'une marchandise que de demander une augmentation de 10 % de la quantité de marchandise.*

7) Soit f une isométrie du plan affine euclidien $\mathscr{P}$.
PROPOSITION : *Si f fixe trois points distincts A, B et C alors f est l'identité.*

8) On se place dans le plan affine euclidien $\mathscr{P}$.
PROPOSITION : *La composée de deux symétries centrales est toujours une translation.*

Tournez la page S.V.P.

Problème n° 2

Partie A : étude d'une fonction et résolution d'une équation

On considère la fonction f de la variable réelle x définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{e^x}$$

1. a. Démontrer que la fonction f n'est pas dérivable en 0.

   b. Justifier que la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ puis que, sur cet intervalle, $f'(x)$ est du même signe que $1 - 2x$.

   c. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

2. Démontrer que, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f(x) = x$ équivaut à $2x + \ell n\,(x) = 0$.

3. Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = 2x + \ell n\,(x)$.

   a. Étudier les variations de h et en déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution sur l'intervalle $]0; +\infty[$. On notera α cette solution.

   b. Justifier que α appartient à l'intervalle $[0,4; 0,5]$.

4. En déduire qu'il existe exactement deux réels solutions de l'équation $xe^x = \sqrt{x}$.

Partie B : intégrale

Soit F la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

où f est la fonction définie dans la partie A.

On ne cherchera pas à calculer F.

1. Justifier que F est une fonction croissante.

2. a. Démontrer que, pour tout $t \geqslant 0$, on a : $\sqrt{t} \leqslant t + \frac{1}{4}$.

   b. En déduire que, pour tout $x \in [0; +\infty[$:

   $$F(x) \leqslant \int_0^x e^{-t}\left(t + \frac{1}{4}\right) dt.$$

   c. Calculer l'intégrale

   $$\int_0^x e^{-t}\left(t + \frac{1}{4}\right) dt.$$

   d. En déduire que la fonction F est majorée par $\dfrac{5}{4}$.

   e. Interpréter graphiquement ce résultat.

Tournez la page S.V.P.

Problème n° 3

Objectif du problème

Soit a un nombre réel. On se propose d'étudier les suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+3} = (a+3)u_{n+2} - (3a+2)u_{n+1} + 2au_n. \qquad (1)$$

On note E_a l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant (1).

Pour toute suite $u \in E_a$ et tout entier naturel n, on note $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

Partie A : une première approche

I. Un élève propose d'utiliser un tableur pour calculer les premières valeurs d'une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_a$, une fois les valeurs de a, u_0, u_1 et u_2 fixées. Il prépare la feuille de calcul suivante :

	A	B	C	D
1	n	u_n	a	1
2	0	2		
3	1	2		
4	2	3		
5	3			
6	4			

La valeur choisie pour le paramètre a est stockée dans la cellule D1.
Quelle formule l'élève peut-il saisir dans la cellule B5 pour obtenir les valeurs de la suite en utilisant la poignée de recopie vers le bas ?

II. Démontrer que, pour tout nombre réel a, les suites constantes appartiennent à E_a.

Partie B : le cas $a = 0$

Dans cette partie, on étudie le cas où $a = 0$. On cherche l'ensemble E_0 des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+3} = 3u_{n+2} - 2u_{n+1}. \qquad (2)$$

III. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite appartenant à E_0.
On considère la suite $e = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $e_0 = 1$ et $\forall n \geqslant 1,\ e_n = 0$.

1. Vérifier que $e \in E_0$.
2. Soit λ un nombre réel. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - \lambda e_n$. Démontrer qu'il existe un réel λ tel que $v_2 = 3v_1 - 2v_0$ et démontrer que pour cette valeur de λ on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+2} = 3v_{n+1} - 2v_n. \qquad (3)$$

3. Démontrer qu'il existe deux nombres réels α et β tels que

$$v_0 = \alpha + \beta, \qquad v_1 = \alpha + 2\beta.$$

4. Démontrer que pour tout entier naturel n, $v_n = \alpha + \beta 2^n$.
5. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est combinaison linéaire des suites $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, où $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne la suite constante de valeur 1.

IV. Réciproquement, démontrer que toute suite de la forme mentionnée à la question **III.5.** appartient à E_0.

V. **1.** Déterminer l'ensemble E_0.

2. Comment s'appelle le raisonnement mobilisé dans les questions **III.** et **IV.** qui a permis de déterminer l'ensemble E_0 ?

Partie C : le cas $a = 3$

On étudie à présent le cas où $a = 3$. On cherche l'ensemble E_3 des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n. \qquad (4)$$

Pour cela, on va utiliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & -11 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

VI. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E_3.

1. Pour tout entier naturel n, trouver une relation entre U_{n+1}, A et U_n.

2. En déduire que, pour tout entier naturel n, $U_n = A^n U_0$.

3. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Démontrer que P est inversible puis que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D, que l'on déterminera.

4. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$.

5. En déduire qu'il existe trois nombres réels x, y, z tels que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = x + y \times 2^n + z \times 3^n.$$

6. Démontrer que x, y, z s'expriment chacun linéairement en fonction de u_0, u_1, u_2.

VII. Démontrer que toute combinaison linéaire des suites $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(3^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E_3.

VIII. Déterminer l'ensemble E_3.

IX. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de E_3 telle que $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Déterminer u_n pour tout entier naturel n.

X. Déterminer la limite de cette suite en $+\infty$.

XI. Écrire un algorithme permettant de déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 10^5$.

XII. Un élève utilise cet algorithme sur la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E_3 telle que $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Il s'étonne de recevoir un message d'erreur. Comment le professeur peut-il expliquer ce message ?

Partie D : le cas général

Cette partie a pour objectif d'interpréter avec un recul de niveau première année de master les résultats des parties précédentes.

Soit a un nombre réel. On considère l'application θ définie par :

$$\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} E_a & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & U_0 = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

XIII. **1.** Rappeler sans démonstration quelle est la structure algébrique de l'ensemble des suites réelles.

2. Démontrer que E_a est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles.

XIV. **1.** Démontrer que θ est une application linéaire.

2. Démontrer que θ est une application bijective.

3. En déduire la dimension de l'espace-vectoriel E_a.

XV. En prenant appui sur les parties précédentes, déterminer une base de E_0 et une base de E_3.

Fin de l'épreuve.