Université de Rennes

MASTER 1
Métiers de l'Education, de l'Enseignement et de la Formation
mention Second degré

Parcours : MATHÉMATIQUES

CAPES blanc du 16/10/2023

Durée : 5 heures

Calculatrice avec mémoire alphanumérique et/ou avec écran graphique qui dispose d'une fonctionnalité **« mode examen »** *autorisée conformément à la circulaire MENH2119786C du 17 juin 2021.*
Elle doit répondre aux spécificités suivantes :

- *la neutralisation temporaire de l'accès à la mémoire de la calculatrice ou l'effacement définitif de cette mémoire ;*
- *le blocage de toute transmission de données, que ce soit par Wifi, Bluetooth ou par tout autre dispositif de communication à distance ;*
- *la* **présence d'un signal lumineux clignotant** *sur la tranche haute de la calculatrice, attestant du passage au « mode examen » ;*
- *la non-réversibilité du « mode examen » durant toute la durée de l'épreuve.*

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

Ce sujet est constitué de trois problèmes totalement indépendants.
La clarté et la précision des raisonnements, la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Tournez la page S.V.P.

Problème n° 1 : VRAI -FAUX

Préciser si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse, puis justifier la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1) Une anagramme est un mot obtenu par transposition des lettres d'un autre mot.
PROPOSITION : *le nombre d'anagrammes du mot DENOMBRE est 20160.*

2) Une entreprise comprend 40 femmes et 70 hommes. Le salaire mensuel net moyen dans l'entreprise est de 1900 euros. Celui des hommes est de 2100 euros.
PROPOSITION : *dans cette entreprise, le salaire mensuel net moyen des femmes est de 35 % inférieur à celui des hommes.*

3) Une urne contient six boules bleues et trois boules rouges. On prélève simultanément deux boules dans l'urne. Tous les prélèvements sont supposés équiprobables.
PROPOSITION : *La probabilité que les deux boules soient de couleurs différentes est égale à* $\frac{1}{2}$.

4) Soit la proposition p : « $ABCD$ est un rectangle » et la proposition q :« $ABCD$ est un quadrilatère ayant ses diagonales de même longueur ».
PROPOSITION : $q \Longrightarrow p$.

5) Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan.
PROPOSITION : *La translation de vecteur* $\overrightarrow{u}$ *est une isométrie du plan.*

6) PROPOSITION : *toute suite non majorée tend vers* $+\infty$.

7) Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1,5$ et, pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \dfrac{2}{3-u_n}$.
PROPOSITION : *pour tout entier naturel* n*, on a :* $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.

8) Soit f une fonction strictement croissante sur l'intervalle [-4 ;4] telle que $f(-4) = -3$ et $f(4) = 2$.
PROPOSITION : *l'équation* $f(x) = 0$ *admet exactement une solution dans l'intervalle [-4 ;4].*

Tournez la page S.V.P.

Problème n° 2

Dans ce problème, f désigne la fonction définie, pour x réel, par $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$.

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A : Étude de la fonction f

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
2. (a) Montrer que f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ et expliciter sa dérivée.
   (b) Donner le tableau complet de variations de f (on justifiera les limites aux bornes de $\mathscr{D}_f$).
   (c) Déterminer les droites asymptotes à $\mathscr{C}_f$.
   (d) Donner l'allure de $\mathscr{C}_f$ dans le repère porté sur la feuille jointe au sujet (à rendre avec la copie). La figure pourra, selon besoin, être complétée dans la suite de cette partie.
3. Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet un axe de symétrie qui admet une équation de la forme $x = k$.
4. Déterminer une équation de la droite T tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
5. Déterminer les coordonnées du point d'intersection, noté A, de la droite T avec l'axe des abscisses.
6. Déterminer une équation de la droite passant par les points A et B, où B est le point de coordonnées $(1, -2)$.
7. Donner une équation de la droite d orthogonale à la droite (AB) et passant par B.
8. On note C le point d'intersection de la droite d avec l'axe des ordonnées. Déterminer l'aire du triangle ABC en unité d'aire.

Partie B : Calcul intégral - Équations différentielles

9. Donner une primitive de la fonction f sur $]0, +\infty[$. *On pourra commencer par décomposer en éléments simples la fraction rationnelle* $\dfrac{1}{x^2+x}$.
10. Déterminer le réel $m > 0$ tel que $\displaystyle\int_m^4 f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

    Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = x \sin x$.
11. Déterminer les primitives de h sur $]0, +\infty[$.
12. (a) Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle
    $$y' + \frac{y}{x^2+x} = 0.$$
    (b) Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle
    $$(E) \qquad y' + \frac{y}{x^2+x} = (x+1)\sin x.$$
    (c) Déterminer la solution u de l'équation différentielle (E) telle que $u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Partie C : Étude d'une suite définie par récurrence

13. Montrer qu'il existe un unique réel ℓ tel que $f(\ell) = \ell$.

14. Montrer que $\ell \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

15. (a) On considère le code Python suivant :

```
def g(x) :
    return  1/(x**2+x) - x
def dichotomie(eps) :
    x=0.5
    y=1
    while y-x>= 2*eps :
        c=(x+y)/ 2
        if  g(c)>0 :
            x=c
        else :
            y=c
    return  (x+y)/ 2
```

Exécuter « à la main » la commande suivante en détaillant itération par itération les valeurs prises par les variables x, y et c ainsi que le résultat final obtenu :

>>> dichotomie(0.05)

(b) Expliquer ce que représente le résultat obtenu à la question précédente dans le contexte de l'exercice.

(c) Justifier que, pour toute valeur strictement positive de eps, la boucle while du programme s'arrête au bout d'un nombre fini d'itérations.

16. Soit la fonction $\varphi :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in]0, +\infty[$, $\varphi(x) = f \circ f(x) - x$.

(a) Calculer $\varphi(\ell)$.

(b) Établir le tableau de signe de φ sur $]0, +\infty[$.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de son premier terme u_0 et par la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

17. Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie si et seulement si $u_0 \in \mathscr{D}_f$.

18. On suppose dans cette question que $u_0 \in]0, +\infty[$.

(a) Montrer que les sous-suites $(u_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ sont monotones.

(b) Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de u_0.

19. On suppose dans cette question que $u_0 \in \mathscr{D}_f \cap]-\infty, 0]$. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de u_0.

Tournez la page S.V.P.

Problème n° 3

Rappels et notations

- Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- On dit que deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$.
- Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives (x, y) et (x', y') dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
  On rappelle que :
  - le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$ noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ vérifie $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = xx' + yy'$,
  - $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$,
  - le déterminant de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ noté $\Delta(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est défini par $\Delta(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = xy' - x'y$.
- Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, on note $\mathscr{M}_2(E)$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans E. On rappelle que $(\mathscr{M}_2(\mathbb{Z}), +)$ et $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}), +)$ sont des groupes commutatifs.
- Soit θ un réel, on note $R(\theta)$ la matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et $S(\theta)$ la matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$
- Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan de coordonnées (x, y) dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. On note $M.\overrightarrow{u}$ le vecteur dont les coordonnées sont obtenues par le produit usuel :

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

- Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Le déterminant de M, noté $\mathrm{Det}(M)$, est défini par : $\mathrm{Det}(M) = ad - bc$.
- Soit M et N deux matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on rappelle que $\mathrm{Det}(MN) = \mathrm{Det}(M) \times \mathrm{Det}(N)$.
- Soit $M \in \mathscr{M}_2(E)$ où E est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dit que M admet un inverse dans $\mathscr{M}_2(E)$ s'il existe une matrice N de $\mathscr{M}_2(E)$ telle que $MN = NM = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie A : quelques propriétés du déterminant de deux vecteurs

1. Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan et λ un réel..

a) Montrer que $\Delta(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) = -\Delta(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

b) Montrer que $\Delta(\overrightarrow{u} + \vec{w}, \overrightarrow{v}) = \Delta(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + \Delta(\vec{w}, \overrightarrow{v})$.

c) Montrer que $\Delta(\lambda\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \lambda\Delta(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

d) En déduire, sans utiliser les coordonnées des vecteurs que

$$\Delta(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} + \lambda\vec{w}) = \Delta(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + \lambda\Delta(\overrightarrow{u}, \vec{w}).$$

e) Montrer que $\Delta(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0 \iff \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

2. On note (x, y) et (x', y') les coordonnées respectives des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
On considère les nombres complexes $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.

a) Montrer que $\bar{z}z' = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + i\Delta(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

b) En déduire que $|\Delta(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})| \leqslant \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$.

c) Montrer que $|\Delta(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})| = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \iff \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$.

3. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $\Delta(M.\overrightarrow{u}, M.\overrightarrow{v}) = \text{Det}(M)\Delta(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

b) En déduire $\Delta(R(\theta).\overrightarrow{u}, R(\theta).\overrightarrow{v})$ et $\Delta(S(\theta).\overrightarrow{u}, S(\theta).\overrightarrow{v})$ en fonction de $\Delta(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Partie B : Solutions d'un système linéaire

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$.

4. a) Montrer que $\text{Det}(M) \in \mathbb{Z}$.

b) Montrer que si M admet un inverse dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ alors il est unique.

c) Montrer que si M admet un inverse dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ alors $|\text{Det}(M)| = 1$.

d) Calculer $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

e) En déduire que si $|\text{Det}(M)| = 1$ alors M admet un inverse N dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ et $N = \text{Det}(M) \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

5. Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2$, on considère le système $S_{M,\alpha,\beta}$ d'inconnue le couple $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$:

$$S_{M,\alpha,\beta} : \left\{ \begin{array}{rcl} ax + by & = & \alpha \\ cx + dy & = & \beta \end{array} \right. \quad \text{où } (a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4 \backslash \{(0, 0, 0, 0)\}$$

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2$.

a) Montrer que (x, y) est solution du système $S_{M,\alpha,\beta}$ si et seulement si $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

b) Montrer que si (x, y) est solution du système $S_{M,\alpha,\beta}$ alors (x, y) est solution du système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \text{Det}(M)x & = & d\alpha - b\beta \\ \text{Det}(M)y & = & -c\alpha + a\beta \end{array} \right.$$

c) En déduire que si pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2$, le système $S_{M,\alpha,\beta}$ admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}^2$ alors $\text{Det}(M)$ divise a, b, c et d. *(On pourra choisir des valeurs adaptées de (α, β).)*

d) On suppose que $\text{Det}(M) \neq 0$. Montrer que si pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2$ le système $S_{M,\alpha,\beta}$ admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}^2$ alors $|\text{Det}(M)| = 1$.

e) On suppose que $|\text{Det}(M)| = 0$. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2$ tel que le système $S_{M,\alpha,\beta}$ n'admette pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$.

f) Montrer que, d'après la question **4.e**, si $|\text{Det}(M)| = 1$ alors pour tout couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2$ le système $S_{M,\alpha,\beta}$ admet comme unique solution dans $\mathbb{Z}^2$ le couple (x_0, y_0) vérifiant

$$x_0 = \text{Det}(M) \times \text{Det} \begin{pmatrix} a & b \\ \beta & d \end{pmatrix} \qquad et \qquad y_0 = \text{Det}(M) \times \text{Det} \begin{pmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{pmatrix}.$$

Fin de l'épreuve.

Feuille à rendre (complétée) avec la copie