Université de Rennes 1 **2006-2007**

CAPES de Mathématiques

Corrigé rapide du Problème n° 3

Partie 1 : Noyau de Dirichlet

1) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On utilise la relation trigonométrique $2\cos a \sin b = \sin(a+b) - \sin(a-b)$:
$D_n(x) 2\pi \sin(\frac{x}{2}) = \sin(\frac{x}{2}) + \left(\sin(3\frac{x}{2}) - \sin(\frac{x}{2})\right) + \left(\sin(5\frac{x}{2}) - \sin(3\frac{x}{2})\right) + \cdots + \left(\sin((2n+1)\frac{x}{2}) - \sin((2n-1)\frac{x}{2})\right)$
c'est à dire $D_n(x)2\pi\sin(\frac{x}{2}) = \sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)$. Le résultat en découle.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. Par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned} S_n(f)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)[1 + 2\cos t\cos x + 2\sin t \sin x + \cdots + 2\cos(nt)\cos(nx) + 2\sin(nt)\sin(nx)]\,dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{1}{2\pi}[1 + 2\cos(t-x) + \cdots + 2\cos n(t-x)]\,dt \end{aligned}$$

Le changement de variable $u = x - t$ conduit alors à $S_n(f)(x) = -\int_{x+\pi}^{x-\pi} f(x-u)D_n(u)\,du$ et le résultat en découle puisque $u \mapsto f(x-u)D_n(u)$ est 2π-périodique (utiliser la relation de Chasles).

Partie 2 : Théorème de Dirichlet

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $\Delta_n = a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0$. On a :
$\Delta_n = \frac{1}{\pi}\cos nx_0 \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt + \frac{1}{\pi}\sin nx_0 \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nx_0 - nt)\,dt$. En posant alors $t = x_0 + u$ on a $\Delta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x_0}^{\pi-x_0} f(x_0+u)\cos nu\,du$. Comme f est 2π périodique,
$\Delta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0+u)\cos nu\,du = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x_0+u)\cos nu\,du + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x_0+u)\cos nu\,du$. En posant $v = -u$ dans la première intégrale, il vient alors :
$\Delta_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x_0 - v)\cos nv\,dv + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x_0+u)\cos nu\,du$ soit finalement :

$$a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x_0+u) + f(x_0-u)]\cos nu\,du$$

2) De même, on a aussi $\frac{a_0(f)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x_0+u) + f(x_0-u)]\frac{1}{2}\,du$ et on peut donc écrire

$$S_n(f)(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x_0+u) + f(x_0-u)]\left(\frac{1}{2} + \cos u + \cdots + \cos nu\right)du$$

On déduit alors $S_n(f)(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x_0+u) + f(x_0-u)]\frac{\sin\left((2n+1)\frac{u}{2}\right)}{2\sin(\frac{u}{2})}\,du$.

3) Cherchons à écrire ℓ sous la même forme. On a $\ell = \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{2}[f(x_0+0) + f(x_0-0)]$ et $\int_0^{\pi} D_n(u)\,du = \frac{1}{2}$ donc
$\ell = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x_0+0) + f(x_0-0)]\frac{\sin\left((2n+1)\frac{u}{2}\right)}{2\sin(\frac{u}{2})}\,du$ et par suite,

$$S_n(f)(x_0) - \ell = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x_0+u) - f(x_0+0)}{2\sin(\frac{u}{2})}\sin(n+\frac{1}{2})u\,du + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x_0-u) - f(x_0-0)}{2\sin(\frac{u}{2})}\sin(n+\frac{1}{2})u\,du$$

4) Notons $\varphi : u \longmapsto \frac{f(x_0-u) - f(x_0-0)}{2\sin(\frac{u}{2})}$. Il est clair que $\varphi(u)$ est équivalent en 0 à $\frac{f(x_0-u) - f(x_0-0)}{u}$ et donc $\lim_{u\to 0}\varphi(u) = f'_g(x_0)$. φ, prolongeable par continuité, est alors intégrable sur $[0,\pi]$ et donc (Théorème de Lebesgue) $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\varphi(u)\sin(n+\frac{1}{2})u\,du = 0$. En procédant de même avec $\psi : u \longmapsto \frac{f(x_0+u) - f(x_0+0)}{2\sin(\frac{u}{2})}$, on a finalement bien $\lim_{n\to\infty} S_n(x_0) = \ell$.