Université de Rennes 1 **2006-2007**

Préparation au CAPES de Mathématiques
Problème n° 3
A rendre pour le jeudi 14 décembre 2006

On note $E_{2\pi}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, de période 2π et intégrables sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}$. Dans tout le problème, f désigne un élément de $E_{2\pi}$. On rappelle que les coefficients de Fourier trigonométriques de f sont les nombres

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx \qquad \text{et} \qquad b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx \qquad (k \in \mathbb{N})$$

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note $S_n(f)$ le polynôme de Fourier de f d'indice n. On rappelle que $S_n(f)$ est défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ S_n(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k(f)\cos kx + \sum_{k=0}^{n} b_k(f)\sin kx$$

Partie 1 : Noyau de Dirichlet

Soit n un entier naturel. On appelle *noyau de Dirichlet* d'ordre n la fonction définie pour tout réel x par $D_n(x) = \frac{1}{2\pi}(1 + 2\cos x + \cdots + 2\cos nx)$ pour $n > 0$ et $D_0(x) = \frac{1}{2\pi}$.

1) Soit n dans $\mathbb{N}$. Montrer que

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)}{\sin(\frac{x}{2})} \text{ pour } x \neq 2k\pi \qquad \text{et} \qquad D_n(2k\pi) = \frac{2n+1}{2\pi} = \lim_{x\to 0} D_n(x)$$

2) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ S_n(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)\,dt$. On dit que S_n est le *produit de convolution* de f et D_n et on note $S_n = f * D_n$.

Partie 2 : Théorème de Dirichlet

On fixe $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose qu'en outre f admet des limites à droite et à gauche et des dérivées à droite et à gauche en x_0. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que $a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [f(x_0+u) + f(x_0-u)]\cos nu\,du$.

2) Montrer que $S_n(f)(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [f(x_0+u) + f(x_0-u)]\frac{\sin\left((2n+1)\frac{u}{2}\right)}{2\sin(\frac{u}{2})}\,du$.

3) On pose $\ell = \frac{1}{2}[f(x_0+0) + f(x_0-0)]$ où $f(x_0+0)$ désigne la limite à droite de f en x_0. Montrer que :

$$S_n(f)(x_0) - \ell = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x_0+u) - f(x_0+0)}{2\sin(\frac{u}{2})}\sin(n+\frac{1}{2})u\,du + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x_0-u) - f(x_0-0)}{2\sin(\frac{u}{2})}\sin(n+\frac{1}{2})u\,du$$

4) Montrer que la série de Fourier de f est convergente en x_0 et a pour somme $\frac{1}{2}\left(f(x_0+0) + f(x_0-0)\right)$.
(On pourra utiliser le théorème de Lebesgue : si f est intégrable sur le segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ alors on a $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)e^{inx}\,dx = 0$.)