Chapitre 2

Dérivation

2.1 Dérivées

2.1.1 Fonction dérivable en un point

Définition 2.1 *Une fonction f, définie sur un intervalle ouvert contenant x_0, est* dérivable en x_0 *s'il existe un nombre $\ell \in \mathbb{R}$ tel que l'une des propriétés équivalentes suivantes soit vérifiée :*

1. $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *a pour limite ℓ quand x tend vers x_0 avec $x \neq x_0$.*
2. $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ *a pour limite ℓ quand h tend vers 0 avec $h \neq 0$.*
3. *Il existe une fonction φ telle que $\lim_{h\to 0}\varphi(h)=0$ et*
$$f(x_0+h)=f(x_0)+h\ell+h\varphi(h).$$

Le nombre ℓ de ces propriétés est alors appelé la dérivée de f en x_0.

La différence entre les propriétés 1) et 2) n'est qu'une question d'écriture : on pose $h = x - x_0$. On voit que les propriétés 2) et 3) disent la même chose en écrivant, pour $h \neq 0$
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\ell+\varphi(h).$$

Proposition 2.2 *Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.*

Ceci se voit immédiatement avec la propriété 3. Par contre, UNE FONCTION CONTINUE (en x_0) N'EST PAS OBLIGATOIREMENT DÉRIVABLE (en x_0) : ainsi $|x|$ est continue en 0, mais pas dérivable.

La tangente au graphe de f en x_0 est la droite d'équation $y = f(x_0)+\ell(x-x_0)$. C'est la droite passant par le point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ dont la pente est la dérivée ℓ.

Si $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ a une limite quand h tend vers 0 avec $h > 0$ (resp. $h < 0$), alors cette limite est appelée *dérivée à droite* (resp. *à gauche*) de f en x_0. Si f a une dérivée à droite et à gauche en x_0, et qu'elles sont égales, alors f est dérivable en x_0 et sa dérivée en x_0 est la valeur commune.

Exercice. 1) Que valent les dérivées à gauche et à droite de $x \mapsto |x|$ en 0 ?

2) Soit f la fonction f définie par $f(x) = x$ pour $x \geq 0$ et $f(x) = x^3 + x$ pour $x \leq 0$. Quelles sont ses dérivées à gauche et à droite en 0 ? Est-elle est dérivable en 0?

On peut aussi parler de la dérivée à gauche (resp. à droite) de f en x_0 quand f est définie sur un intervalle $]a, x_0]$ (resp. $[x_0, b[$).

2.1.2 Fonction dérivée, dérivées successives

Soit D un intervalle ouvert, ou une réunion d'intervalles ouverts. Si la fonction à valeurs réelles f est définie et dérivable en tout point de D, on note f' la *fonction dérivée de* f définie sur D.

On utilise aussi une autre notation (la notation de Leibniz) : $\frac{df}{dx}$ ou $\frac{d}{dx}(f)$ pour f' (où x est le nom de la variable). Par exemple, on écrit

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^3 + x^2 + 1}\right) = \frac{3x^2 + 2x}{2\sqrt{x^3 + x^2 + 1}}.$$

Si f' admet elle-même une dérivée sur D, on note f'' cette dérivée et on l'appelle *dérivée seconde* de f. Par récurrence on définit la dérivée n-ème, que l'on note $f^{(n)}$. On a $(f^{(n)})' = f^{(n+1)}$. En notation de Leibniz, on écrit $f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}$.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), philosophe et mathématicien, est considéré comme l'un des inventeurs, avec Isaac Newton (1642-1727), du calcul infinitésimal ; une polémique sur la paternité de cette invention les opposa. Leibniz voit df et dx comme des *"infiniments petits"*; l'usage de ces quantités infiniment petites au statut difficile à préciser soulève des objections. Dans l'Encyclopédie, d'Alembert explique que le calcul différentiel ne suppose pas nécessairement l'existence de ces quantités, et que ce calcul ne consiste qu'à déterminer la limite d'un rapport (le formalisme des ϵ-δ pour les limites ne viendra que plus tard, au 19ème siècle). Il place ce point de vue dans la ligne de Newton et de son "calcul des fluxions". L'approche de Newton est plus cinématique, et sa notation $\dot{x}$ est encore parfois utilisée dans cette discipline, pour désigner la dérivée de x par rapport au temps. Quant à la notation f' pour la dérivée de f, son usage remonte à Lagrange (1736-1813).

2.1.3 Dérivation et opérations sur les fonctions

On rappelle les règles de calcul suivantes.

$$(f+g)' = f' + g', \qquad \text{si } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ alors } (\lambda f)' = \lambda f',$$

$$(fg)' = f'g + fg', \qquad \text{si } n \in \mathbb{N}, \text{ alors } (f^n)' = nf^{n-1}f',$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2}, \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Les règles de la première ligne disent que la dérivation est une application linéaire de l'espace vectoriel des fonctions dérivables sur D dans l'espace vectoriel des fonctions

4 ANALYSE

* *Art. 1.* viendra alors $y+dy$; & z, $z+dz$; pour la conſtante a,*elle demeurera la même a: de ſorte que la quantité propoſée $a+x+y-z$ deviendra $a+x+dx+y+dy-z-dz$; & ſa différence, que l'on trouvera en la retranchant de cette derniere, ſera $dx+dy-dz$. Il en eſt ainſi des autres; ce qui donne cette régle.

REGLE I.

Pour les quantités ajoûtées, ou ſouſtraites.

On prendra la différence de chaque terme de la quantité propoſée, & retenant les mêmes ſignes, on en compoſera une autre quantité qui ſera la différence cherchée.

PROPOSITION II.

Problême.

5. PRENDRE *la différence d'un produit fait de pluſieurs quantités multipliées les unes par les autres.*

1°. La différence de xy eſt $ydx+xdy$. Car y devient $y+dy$ lors que x devient $x+dx$, & partant xy devient alors $xy+ydx+xdy+dxdy$ qui eſt le produit de $x+dx$ par $y+dy$, & ſa différence ſera $ydx+xdy+dxdy$, c'eſt-à-dire* $ydx+xdy$: puiſque $dxdy$ eſt une quantité infiniment petite par rapport aux autres termes ydx, & xdy; car ſi l'on diviſe par éxemple ydx & $dxdy$ par dx, on trouve d'une part y, & de l'autre dy qui en eſt la différence, & par conſéquent infiniment moindre qu'elle. D'où il ſuit que la différence du produit de deux quantités eſt égale au produit de la différence de la premiere de ces quantités par la ſeconde, plus au produit de la différence de la ſeconde par la premiere. * *Art. 2.*

2°. La différence de xyz eſt $yzdx+xzdy+xydz$. Car en conſidérant le produit xy comme une ſeule quantité, il faudra, comme l'on vient de prouver, prendre le produit de ſa différence $ydx+xdy$ par la ſeconde z (ce qui donne $yzdx+xzdy$) plus le produit de la différence dz

Une page de l'*Analyse des infiniments petits*... de G. de L'Hospital (1696). On y voit établir la règle de dérivation d'un produit.

définies sur D. La règle de dérivation d'un produit est démontrée dans le cours de Mathématiques de l'UE1. Il est intéressant de comparer cette démonstration à l'argument donné par L'Hospital dans le texte reproduit en illustration. L'auteur ne parle pas de fonctions f et g, mais de "quantités" x et y (on ne voit plus la variable). Il utilise la "différence" dx de x, qui est pensée comme un accroissement infiniment petit de x.

Exercice. Retrouver la démonstration de la règle de dérivation de $1/f$. On suppose que $f(x_0) \neq 0$. On utilise l'égalité

$$\frac{1}{f}(x) - \frac{1}{f}(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x)}{f(x)\, f(x_0)} \,.$$

Il faut évidemment bien connaître les dérivées des fonctions usuelles. Une règle importante (et qu'il faut savoir utiliser correctement) est celle de la dérivation des fonctions composées.

Proposition 2.3 *Si f est dérivable en x_0, et si g est dérivable en $f(x_0)$, alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable en x_0, et sa dérivée est*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0)$$

La démonstration de cette proposition a déjà été donnée dans le cours de Mathématiques de l'UE1.

En notation de Leibniz, ceci s'écrit agréablement : si g est fonction de f et f est fonction de x, alors

$$\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{df}\,\frac{df}{dx}.$$

Mais il faut bien réaliser ce que ceci veut dire. Par exemple, supposons que l'on ait à calculer la dérivée de $y = \ln(2 + \cos\sqrt{1+x^2})$. On peut décomposer notre fonction compliquée et poser $w = 1 + x^2$, $v = \sqrt{w}$, $u = 2 + \cos v$, $y = \ln u$. On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dv}\,\frac{dv}{dw}\,\frac{dw}{dx} = \frac{1}{u} \times (-\sin v) \times \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{w}} \times \cancel{2}x \\ &= \frac{-x \sin\sqrt{1+x^2}}{(2 + \cos\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

L'application de ces règles de calcul est entièrement mécanique, et elle est effectivement mécanisée dans les logiciels de calcul formel. Refaisons par exemple notre dernier calcul à l'aide du logiciel MAPLE.

```
> y:=ln(2+cos(sqrt(1+x^2))) : diff(y,x) ;


                               2 1/2
                      sin((1 + x )    ) x
           - ---------------------------------
                       2 1/2                  2 1/2
               (1 + x )     (2 + cos((1 + x )     ))
```

La dérivée des fonctions réciproques se calcule grâce au résultat suivant.

Proposition 2.4 *Soit f une fonction réelle strictement monotone sur $]a,b[$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors f a une fonction réciproque f^{-1} de $f(]a,b[)$ sur $]a,b[$. Soit $x_0 \in]a,b[$, et posons $y_0 = f(x_0)$. Si $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en y_0 et*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Démonstration: La première partie de la proposition a été vue pour les fonctions continues strictement monotones sur un intervalle, et on sait que f^{-1} est continue (théorème 1.30). Etudions la dérivabilité de f^{-1} en y_0. On a :

$$\begin{aligned} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} &= \left(\frac{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(y_0))}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)} \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)^{-1} \end{aligned}$$

Et donc : $\displaystyle\lim_{y \to y_0,\ y \neq y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}.$
La deuxième égalité utilise le fait que f^{-1} est continue, et la proposition 1.21. Remarquer que les dénominateurs ne sont jamais nuls, grâce à l'hypothèse de stricte monotonie. □

Du point de vue graphique, la tangente au graphe de f^{-1} au point (y_0, x_0) est la symétrique par rapport à la droite $y = x$ de la tangente au graphe de f au point (x_0, y_0). Les pentes de ces droites sont inverses l'une de l'autre.

Rappelons ici les dérivées des fonctions réciproques des fonctions trigonométriques et hyperboliques, que l'on obtient en appliquant la proposition précédente.

$$\begin{aligned} \arcsin'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \quad \operatorname{argsh}'(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\ \arccos'(x) &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} & \quad \operatorname{argch}'(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \\ \arctan'(x) &= \frac{1}{1+x^2} & \quad \operatorname{argth}'(x) &= \frac{1}{1-x^2}. \end{aligned}$$

2.2 Accroissements finis

2.2.1 Extremum local

On dit qu'une fonction réelle f présente un *maximum local* (resp. *minimum local*) en un point x_0 de son domaine de définition s'il existe un intervalle ouvert I contenant x_0 tel que, pour tout x de I où f est définie on a $f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$). Un *extremum* est un maximum ou un minimum.

Proposition 2.5 *Supposons f définie sur un intervalle ouvert contenant x_0, et dérivable en x_0. Si f a un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.*

Autrement dit, l'annulation de la dérivée est une condition nécessaire à l'existence d'un extremum local. Est ce que c'est une condition suffisante ? (On pourra penser à $f(x) = x^3$ en 0). Remarquer aussi qu'on se place à l'intérieur d'un intervalle ouvert où f est définie : une fonction définie sur un segment $[a, b]$ peut avoir un maximum en b, sans que sa dérivée à gauche en b soit nulle.
Démonstration: Si f a un maximum local en x_0, alors par passage à la limite dans les inégalités on a

$$\lim_{h\to 0,\ h>0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{h\to 0,\ h<0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0.$$

Comme les deux limites sont égales à $f'(x_0)$, on a $f'(x_0) = 0$. □

2.2.2 Théorème de Rolle

Théorème 2.6 (Théorème de Rolle) *Soit f une fonction réelle définie et continue sur le segment $[a, b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ (avec $a < b$). Si $f(a) = f(b) = 0$, alors il existe c appartenant à $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Démonstration: On pose $M = \sup(f[a, b])$ et $m = \inf(f([a, b]))$. Ces bornes existent et sont atteintes par f puisque f est continue sur $[a, b]$. Comme $f(a) = 0$, on doit avoir $m \leq 0 \leq M$. Si $m = 0 = M$, c'est que f est constante et égale à 0 sur $[a, b]$, et donc sa dérivée est partout nulle sur $]a, b[$. Sinon, on a par exemple $M > 0$. Soit $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = M$. Alors f présente un maximum (local) en c et donc d'après la proposition 2.5 on a $f'(c) = 0$. □

Michel Rolle (1652-1719) était intéressé par le problème de la séparation des racines d'une équation algébrique; le résultat dit que deux racines d'un polynôme sont séparées par une racine de la dérivée. Rolle est aussi connu pour son opposition à l'usage des infiniment petits de Leibniz.

Voyons un exemple d'utilisation du théorème de Rolle, pour majorer une erreur d'interpolation. Quand il n'y avait pas encore de calculettes, on lisait les valeurs des fonctions trigonométriques dans des tables. Par exemple, la table des sinus en radians donnait

$0,375$	$0,366\,272\,5$	$\pm 0,5\ 10^{-7}$
$0,376$	$0,367\,202\,9$	$\pm 0,5\ 10^{-7}$

Par interpolation linéaire on obtient $\sin(0,3755) = 0,366\,737\,7$ qui est la moyenne des deux valeurs indiquées. De combien de décimales est-on sûr? L'interpolation linéaire consiste à remplacer sur le segment $[a, b]$ la fonction f par la fonction affine dont le graphe est la droite qui joint les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. C'est la fonction φ donnée par

$$\varphi(x) = \frac{x-a}{b-a} f(b) + \frac{b-x}{b-a} f(a).$$

Choisissons $c \in]a, b[$. L'erreur d'interpolation en c est $|f(c) - \varphi(c)|$. Posons

$$g(x) = f(x) - \varphi(x) - \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}(f(c) - \varphi(c)).$$

On constate que $g(a) = g(c) = g(b) = 0$. On suppose f dérivable autant de fois que l'on veut sur $[a, b]$, et alors g l'est aussi. On peut appliquer le théorème de Rolle aux deux segments $[a, c]$ et $[c, b]$. La dérivée g' s'annule en $a_1 \in]a, c[$ et en $b_1 \in]c, b[$. On applique de nouveau le théorème de Rolle à g' sur $[a_1, b_1]$, et on trouve $d \in]a_1, b_1[$ tel que

$$0 = g''(d) = f''(d) - \frac{2}{(c-a)(c-b)}(f(c) - \varphi(c))$$

(vérifiez le calcul de la dérivée seconde). Si on pose $M = \sup(|f''(x)|)$ pour $x \in [a, b]$, on a la majoration

$$|f(c) - \varphi(c)| \leq \frac{|c-a|\,|c-b|}{2} M.$$

Une étude de la variation de $|c-a|\,|b-c|$ quand c parcourt $[a, b]$ montre que le maximum est atteint pour $c = (a+b)/2$ et vaut $(b-a)^2/4$ (faire cette étude). On obtient finalement comme majoration de l'erreur d'interpolation

$$|f(c) - \varphi(c)| \leq \frac{(b-a)^2}{8} M.$$

Dans l'exemple de la table des sinus on a $b - a = 10^{-3}$, et la dérivée seconde qui est $-\sin$ est majorée en valeur absolue par $0,4$ sur l'intervalle considéré. L'erreur d'interpolation est majorée par $0,5\ 10^{-7}$. Avec les erreurs d'arrondi, le résultat est bon à 10^{-7} près. La table est faite pour que le nombre de décimales données corresponde à la précision obtenue par interpolation linéaire.

2.2.3 Théorème des accroissements finis

Théorème 2.7 (Théorème des accroissements finis) *Soit f une fonction réelle définie et continue sur le segment $[a, b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ (avec $a < b$). Il existe c appartenant à $]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.*

Remarquer qu'on a aussi $f(a) - f(b) = f'(c)(a-b)$. Peu importe l'ordre dans lequel on prend les bornes de l'intervalle.

D'un point de vue graphique, le théorème des accroissements finis dit qu'il existe un point c de l'intervalle ouvert $]a, b[$ tel que la pente de la tangente au graphe de f au point de coordonnées $(c, f(c))$ soit égale à la pente de la droite qui joint les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

Démonstration: On pose

$$g(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)\right).$$

Cette fonction g est la différence entre f et la fonction affine qui vaut $f(a)$ en a et $f(b)$ en b. Cette fonction g est continue sur $[a, b]$, et elle est dérivable sur $]a, b[$. Sa dérivée est

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

On a $g(a) = g(b) = 0$. On peut donc appliquer le théorème de Rolle à la fonction g, ce qui donne $c \in]a, b[$ tel que

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Le théorème des accroissements finis justifie l'utilisation du signe de la dérivée pour étudier les variations d'une fonction : si f est continue sur un intervalle I, dérivable à l'intérieur de I, et si f' est positive (resp. négative) à l'intérieur de I, alors f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I. En effet, si on prend a et b dans I avec $a < b$, l'égalité $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ avec $f'(c) > 0$ (resp. $f'(c) < 0$) entraîne que $f(a) < f(b)$ (resp. $f(b) < f(a)$).
Comme conséquence du théorème des accroissements finis, on a aussi le fait que si $f' = 0$ sur un intervalle I, alors f est constante sur I.

Dans le théorème des accroissements finis, rien n'est dit sur le c, à part qu'il se situe dans l'intervalle $]a, b[$. Le théorème des accroissements finis est utile principalement quand on peut encadrer la dérivée f'.

Théorème 2.8 (Inégalité des accroissements finis) *Soit f une fonction réelle continue sur un intervalle I, dérivable à l'intérieur de I. Supposons que l'on ait deux réels m et M tels que, pour tout x à l'intérieur de I, les inégalités $m \leq f'(x) \leq M$ soient vérifiées. Alors, quels que soient les réels a et b de I, avec $a < b$, on a*

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a).$$

En prenant les bornes dans l'autre sens, on a bien sûr $M(a - b) \leq f(a) - f(b) \leq m(a - b)$.

Si la fonction f a une dérivée continue sur le segment $[a, b]$ (dans la terminologie que l'on introduira plus loin, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$), alors on peut prendre pour M (resp. m) la borne supérieure (resp. inférieure) de $f'(x)$ sur $[a, b]$.
Démonstration: On sait d'après le théorème des accroissements finis qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$, et par hypothèse on a $m \leq f'(c) \leq M$. □

On peut généraliser le théorème des accroissements finis de la manière suivante.

Proposition 2.9 *Soient f et g deux fonctions réelles, continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$ (où $a < b$). Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a)).$$

Si on suppose que $g(a) \neq g(b)$ et que g' ne s'annule pas sur $]a, b[$, ceci veut dire qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Exercice. 1) Vérifiez que c'est bien une généralisation : on retrouve le théorème des accroissements finis en prenant $g : x \mapsto x$.

2) Démontrez la proposition. Posez

$$h(x) = (f(x) - f(a))(g(b) - g(a)) - (g(x) - g(a))(f(b) - f(a)).$$

et vérifiez que h satisfait bien les hypothèses du théorème de Rolle pour a et b. Conclure.

La proposition 2.9 nous permet de démontrer la règle de l'Hospital, un outil que vous avez utilisé dans l'UE1 pour trouver la limite de certaines "formes indéterminées" $\frac{0}{0}$.

Dans l'énoncé qui suit, $I \setminus \{a\}$ est une notation pour "l'intervalle I privé du point a".

Proposition 2.10 (Régle de l'Hospital) *On suppose que les fonctions réelles f et g sont définies et continues sur un intervalle I contenant a, et que $f(a) = g(a) = 0$. On suppose aussi que f et g sont dérivables sur $I \setminus \{a\}$, et que ni g ni g' ne s'annulent sur $I \setminus \{a\}$. Si*

$$\lim_{x \to a,\ x \neq a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell,$$

alors

$$\lim_{x \to a,\ x \neq a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell,$$

Guillaume de l'Hospital (1661-1704) fut le propagateur en France des idées de Leibniz. Son ouvrage *"Analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes"*, fortement inspiré de l'enseignement de Jean Bernoulli (1667-1748), est considéré comme le premier manuel de calcul différentiel.

Démonstration: Soit $x \in I \setminus \{a\}$. D'après le théorème des accroissements finis généralisé, il existe c strictement compris entre a et x tel que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Quand x tend vers a, c (qui dépend de x) est coincé entre a et x, et tend aussi vers a. Donc si f'/g' a une limite en a, f/g a la même limite. □

Exercice. 1) Calculer $\lim_{x \to \pi} \dfrac{1 + \cos x}{x - \pi}$. 2) Calculer $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{ch} x - \cos x}{\ell n\,(1 + x) - \sin x}$ (en deux coups).

3) Calculer $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2 \sin 1/x}{\sin x}$.

2.3 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

2.3.1 Définition et premières propriétés

Définition 2.11 *Soit D un intervalle ouvert, ou une réunion d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. Soit k un entier naturel. Une fonction réelle f définie sur D est dite* de classe $\mathcal{C}^k$ sur D *quand elle est k fois dérivable sur D, et que sa dérivée k-ème $f^{(k)}$ est continue sur D (on dit aussi que f* est k fois continûment dérivable sur *I).*

Il est bon de remarquer qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur D est de classe $\mathcal{C}^\ell$ pour tout $\ell \leq k$.

Pour $k = 0$, une fonction de classe $\mathcal{C}^0$ sur D est simplement une fonction continue sur D.

Pour $k > 0$, une fonction f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur D si et seulement si elle est dérivable sur D, et si sa dérivée f' est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur D. En utilisant ce critère, on démontre par récurrence sur k la proposition suivante.

Proposition 2.12 . *Soient f et g deux fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^k$ sur D, λ un nombre réel. Alors les fonctions $f+g$, λf et fg sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur D. Si f ne s'annule pas sur D, alors $1/f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur D.*

En particulier, les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur D forment un sous-espace vectoriel de l'espace de toutes les fonctions réelles définies sur D.
Démonstration: La proposition est connue pour $k = 0$, quand on parle de fonctions continues. On suppose maintenant $k > 0$, et la proposition vraie pour $k-1$. On se contentera de faire la démonstration du pas de récurrence pour $1/f$. On sait déjà que $1/f$ est dérivable, et sa dérivée vaut $-f'/f^2$. Les fonctions f' et f sont de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur D. Par l'hypothèse de récurrence, la fonction $-f'/f^2$ est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur D. Donc $1/f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur D. □

Pour calculer la dérivée k-ème d'un produit, on dispose de la formule suivante.

Proposition 2.13 (Formule de Leibniz) . *Soient f et g deux fonctions k fois dérivables sur D. Alors fg est k fois dérivable sur D et*

$$(fg)^{(k)} = f^{(k)}g + \mathbf{C}_k^1 f^{(k-1)}g' + \cdots + \mathbf{C}_k^i f^{(k-i)}g^{(i)} + \cdots + fg^{(k)}.$$

On remarquera l'analogie formelle de cette formule avec la formule du binôme.
Démonstration: . On procède par récurrence sur k. Pour $k = 1$, la formule va bien : $(fg)' = f'g + fg'$. Supposons la formule établie pour k et passons à $k+1$. On a

$$\begin{aligned} (fg)^{(k+1)} &= ((fg)^{(k)})' = \left(\sum_{i=0}^{k} \mathbf{C}_k^i f^{(k-i)}g^{(i)}\right)' \\ &= \sum_{i=0}^{k} \mathbf{C}_k^i f^{(k-i+1)}g^{(i)} + \sum_{i=0}^{k} \mathbf{C}_k^i f^{(k-i)}g^{(i+1)} \\ &= f^{(k+1)}g + \sum_{j=1}^{k} (\mathbf{C}_k^{j-1} + \mathbf{C}_k^j) f^{(k+1-j)}g^{(j)} + fg^{(k+1)}, \end{aligned}$$

et on utilise pour conclure que $\mathbf{C}_k^{j-1} + \mathbf{C}_k^j = \mathbf{C}_{k+1}^j$. Si vous ne connaissez pas déjà cette relation entre coefficients binomiaux, vérifiez-la ! □

2.3.2 Composition, fonction réciproque

La composée de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^k$.

Proposition 2.14 *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur D, et soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur E, avec $f(D)$ contenu dans E. Alors la fonction composée $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur D.*

Démonstration: On procède par récurrence sur k. Pour $k = 0$, on sait que la composée de deux fonctions continues est une fonction continue. Supposons $k > 0$, et la proposition établie pour $k-1$. Sous les hypothèses de la proposition, on sait déjà que $g \circ f$ est dérivable sur D, et que $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$. Les fonctions f', g' et f sont de classe $\mathcal{C}^{k-1}$, et par hypothèse de récurrence la composée $g' \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$. Donc $(g \circ f)'$ est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$, et $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur D. □

Nous voyons maintenant à quelle condition la fonction réciproque d'une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ est elle-même de classe $\mathcal{C}^k$.

Proposition 2.15 *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ (k un entier strictement positif) sur un intervalle ouvert I, strictement monotone sur cet intervalle. Soit f^{-1} la fonction réciproque de f. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *la fonction f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^k$ sur l'intervalle $f(I)$,*
2. *pour tout x dans I, $f'(x) \neq 0$.*

Démonstration: Supposons la propriété 1 vérifiée. Puisque $f^{-1} \circ f$ est l'application identique de l'intervalle I, on a $(f^{-1})'(f(x)) \times f'(x) = 1$ pour tout x de I, et donc $f'(x) \neq 0$.

Supposons maintenant la propriété 2 vérifiée. On sait déjà que f^{-1} est dérivable sur $f(I)$, et que sa dérivée vaut $(f^{-1})'(y) = 1/f'(f^{-1}(y))$. On raisonne alors par récurrence sur k. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, la formule pour $(f^{-1})'$ montre qu'elle est continue, et donc f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$. Supposons maintenant $k > 1$, et que l'on sache déjà que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$. Alors la même formule montre que $(f^{-1})'$ est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$, et donc f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^k$. □

Tout ce qu'on a dit jusqu'à présent s'étend au cas $k = \infty$. Une fonction f est dite *de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle ouvert I* quand elle y est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout k, c.-à-d. quand f y est dérivable à n'importe quel ordre.

2.3.3 Prolongement par continuité des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Soit I un intervalle ouvert, a un point de I. Supposons donnée une fonction f de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I \setminus \{a\}$ (l'intervalle I privé du point a). A quelle condition peut on prolonger par continuité la fonction f en une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur l'intervalle I tout entier ?

Proposition 2.16 *Supposons f de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I \setminus \{a\}$. Supposons que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ et que, pour tout i avec $1 \leq i \leq k$ on ait $\lim_{x\to a} f^{(i)}(x) = \ell_i$. Soit $\overline{f}$ la fonction f prolongée par continuité en a par $\overline{f}(a) = \ell$. Alors la fonction $\overline{f}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I tout entier, et $\overline{f}^{(i)}(a) = \ell_i$.*

Autrement dit, si f est k fois continûment dérivable en dehors de a, et si f et ses dérivées jusqu'à l'ordre k ont des limites finies en a, alors f se prolonge par continuité en une fonction k fois continûment dérivable y compris en a, et les dérivées en a sont les limites des dérivées.

Démonstration: On raisonne encore une fois par récurrence sur k. Pour $k = 0$, c'est le prolongement par continuité ordinaire. Supposons $k > 0$, et le résultat établi pour $k-1$. On applique l'hypothèse de récurrence à la fonction f' et on obtient que f' se prolonge par continuité en une fonction $k-1$ fois continûment dérivable sur I tout entier. Il ne reste donc qu'à vérifier que le prolongement par continuité $\overline{f}$ est dérivable en a, et que $\overline{f}'(a) = \ell_1 = \lim_{x\to a} f'(x)$. La fonction $\overline{f}$ est continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$. La formule des accroissements finis nous dit que pour $x \in I$, $x \neq a$, il existe c compris entre a et x tel que $(\overline{f}(x) - \overline{f}(a))/(x-a) = f'(c)$. Quand x tend vers a, c qui est coincé entre a et x tend aussi vers a, et donc

$$\lim_{x\to a} \frac{\overline{f}(x) - \overline{f}(a)}{x-a} = \ell_1,$$

ce qui montre ce que l'on voulait. □

2.3.4 Recollement de solutions d'équations différentielles

Le résultat que l'on vient d'établir est utile pour recoller des solutions d'équations différentielles linéaires du premier ordre. On sait (voir le chapitre 9 du cours de Mathématiques de l'UE1) résoudre une équation différentielle linéaire de la forme

$$y' + a(x)\,y = b(x)\ .$$

On élargit un peu le cadre de l'étude en considérant des équations

$$a(x)\,y' + b(x)\,y = c(x)\ ,$$

où $a(x)$, $b(x)$ et $c(x)$ sont des fonctions continues sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. On peut se ramener, dans un intervalle ouvert $J \subset I$ où la fonction a ne s'annule pas, à l'étude de l'équation

$$y' + \frac{b(x)}{a(x)} y = \frac{c(x)}{a(x)},$$

et on a vu comment traiter ce problème. Mais ceci ne nous donne pas de solution sur I tout entier (il se peut d'ailleurs qu'il n'en existe pas). Pour obtenir une solution y qui soit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I tout entier, il faut voir comment "recoller" les solutions obtenues sur les intervalles où a ne s'annule pas. Nous traiterons quelques exemples.

Cherchons les solutions sur $\mathbb{R}$ de

$$xy' - y = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Nous avons déjà vu (dans le cours de Mathématiques de l'UE1) que la solution générale sur $]0, +\infty[$ de

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

est donnée par

$$y = x(\operatorname{argsh}(x) + K),$$

où K est une constante réelle. On a $\lim_{x\to 0_+} y(x) = 0$, et $\lim_{x\to 0_+} y'(x) = K$ (faites le calcul). De même, la solution générale sur $]-\infty, 0[$ est donnée par $y = x(\operatorname{argsh}(x) + L)$, où L est une constante réelle; on a $\lim_{x\to 0_-} y(x) = 0$, et $\lim_{x\to 0_-} y'(x) = L$.

Pour recoller deux solutions sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ de façon à obtenir une solution continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier, il faut et il suffit de prendre $K = L$. La solution générale sur $\mathbb{R}$ est donc donnée par

$$y = x(\operatorname{argsh}(x) + K)\ ,$$

où K est une constante réelle. On remarque que l'équation différentielle n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$ pour une condition initiale $x_0 = 0$, $y_0 \neq 0$, et une infinité pour la condition initiale $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

Cherchons les solutions sur $\mathbb{R}$ de

$$x^3 y' - 2y = 0.$$

On vérifie facilement que la solution générale sur $]0, +\infty[$ est

$$y = Ke^{-1/x^2}$$

où K est une constante réelle. On a $\lim_{x\to 0_+} y(x) = 0$, et $\lim_{x\to 0_+} y'(x) = 0$. On a un résultat analogue sur $]-\infty, 0[$. Donc ici on obtient la solution générale sur $\mathbb{R}$ sous la forme

$$y = \begin{cases} Ke^{-1/x^2} & \text{si } x > 0 \\ Le^{-1/x^2} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

où K et L sont deux constantes réelles quelconques, et dans cet exemple le recollement donne toujours une fonction continûment dérivable (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$. On est ici en présence d'une équation linéaire homogène, et conformément au résultat général l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel. Mais ici sa dimension est 2.

Exercice. Donnez une base de cet espace vectoriel.

2.4 Fonctions convexes

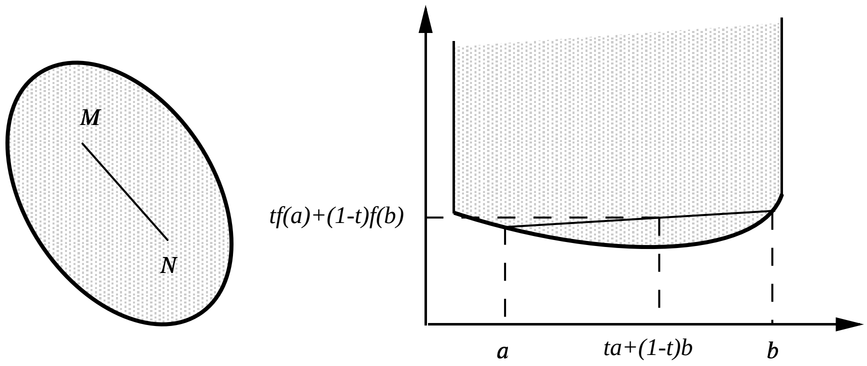
Une partie A du plan est dite *convexe* quand elle vérifie la propriété suivante : si M et N sont deux points de A, alors le segment $[MN]$ est tout entier contenu dans A. Une fonction définie sur un intervalle I est convexe si la partie du plan située au-dessus de son graphe est convexe. Ceci se traduit par la définition suivante :

Définition 2.17 *Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I. On dit que f est* convexe *quand pour tous a, b de I, et pour tout t de $[0,1]$, on a*

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b).$$

On dit que f est concave *quand $-f$ est convexe, c.-à-d. quand pour tous a, b de I et tout t de $[0,1]$ on a*

$$f(ta + (1-t)b) \geq tf(a) + (1-t)f(b).$$



Un ensemble convexe — Le graphe d'une fonction convexe

La convexité d'une fonction peut se caractériser par le signe de sa dérivée seconde, quand celle-ci existe.

Théorème 2.18 *Soit f une fonction réelle, deux fois dérivable sur un intervalle I. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *f est convexe sur I,*
2. *la dérivée f' est croissante sur I,*
3. *la dérivée seconde f'' est positive ou nulle sur I.*

Démonstration: Les propriétés 2 et 3 sont évidemment équivalentes.

Supposons vérifiée la propriété 1. Soient $a < b$ deux éléments de I. On veut montrer que $f'(a) \leq f'(b)$. Soit c compris entre a et b. La convexité de f entraîne

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(c)}{b - c}. \qquad (*)$$

En effet, on peut écrire $c = ta + (1-t)b$ avec $t \in]0,1[$, et ces inégalités se réécrivent alors

$$\frac{f(ta+(1-t)b)-f(a)}{(1-t)(b-a)} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b)-f(ta+(1-t)b)}{t(b-a)},$$

ce qui se déduit immédiatement de l'inégalité de définition de la convexité. Quand on fait tendre c vers a, le terme de gauche des inégalités $(*)$ tend vers $f'(a)$. Quand on fait tendre c vers b, le terme de droite tend vers $f'(b)$. Par passage à la limite dans les inégalités, on obtient donc

$$f'(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'(b),$$

ce qui est ce que l'on voulait.

Réciproquement, supposons la propriété 2 vérifiée, et soit $a < b$ deux éléments de I. Soit c compris entre a et b. Le théorème des accroissements finis nous dit qu'il existe $d_1 \in]a,c[$ et $d_2 \in]c,b[$ tels que

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} = f'(d_1), \qquad \frac{f(b)-f(c)}{b-c} = f'(d_2).$$

Comme f' est croissante et que $d_1 < d_2$, on en déduit que

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(b)-f(c)}{b-c}.$$

D'où, en posant $c = ta + (1-t)b$,

$$\frac{f(ta+(1-t)b)-f(a)}{(1-t)(b-a)} \leq \frac{f(b)-f(ta+(1-t)b)}{t(b-a)},$$

ce qui donne

$$f(ta+(1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b).$$

Cette inégalité est vérifiée pour tout $t \in]0,1[$, et aussi trivialement pour $t = 0$ ou pour $t = 1$. Donc f est convexe sur I. $\square$

Remarque. La démonstration montre que si l'on suppose seulement f une fois dérivable sur I, on a toujours l'équivalence des propriétés 1 et 2.

On a bien sûr aussi l'équivalence correspondante :

1. f est concave sur I,
2. f' est décroissante sur I,
3. f'' est négative ou nulle sur I.

Proposition 2.19 *Soit f une fonction réelle, définie et au moins une fois dérivable sur l'intervalle I. Soit x_0 un point de I. Si f est convexe sur I, et si $f'(x_0) = 0$, alors $f(x_0)$ est le minimum de f sur I.*

Démonstration: Pour $x \in I$, on sait que $f'(x) \leq 0$ si $x \leq x_0$, et que $f'(x) \geq 0$ si $x \geq x_0$, parce que f' est croissante. Donc f est décroissante à gauche de x_0 et croissante à droite de x_0, ce qui montre bien que $f(x_0)$ est le minimum de f sur I. □

De même, si f est concave sur un intervalle I et si $f'(x_0) = 0$ avec $x_0 \in I$, alors $f(x_0)$ est le maximum de f sur I.

La proposition sur le minimum correspond à ce qui se passe quand la tangente au graphe de f est horizontale en x_0. Quand la tangente est "penchée", voici ce qui se passe : une fonction réelle f dérivable et convexe sur un intervalle I est au dessus de sa tangente en n'importe quel point x_0 de I. En effet, on peut poser $g(x) = f(x) - (f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0))$. Remarquer que $y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$ est l'équation de la tangente en x_0. Comme $g'(x) = f'(x) - f'(x_0)$, on voit bien que g est dérivable et convexe sur I. Comme $g'(x_0) = 0$, l'application de la proposition sur le minimum montre bien que la fonction est au dessus de sa tangente en x_0 sur l'intervalle I.

Exemple.
La fonction ln est concave sur $]0, +\infty[$. En effet $\ln'(x) = 1/x$ et $\ln''(x) = -1/x^2 \leq 0$. On a donc

$$\ln(ta + (1-t)b) \geq t \ln a + (1-t) \ln b \quad \text{pour } a > 0,\ b > 0 \text{ et } t \in]0,1[.$$

Soient p et q deux réels strictement plus grands que 1 tels que $1/p + 1/q = 1$. On peut prendre $t = 1/p$, alors $1 - t = 1/q$ et on obtient

$$\ln\left(\frac{a}{p} + \frac{b}{q}\right) \geq \frac{\ln a}{p} + \frac{\ln b}{q},$$

d'où, en transformant cette inégalité par la fonction exponentielle qui est croissante

$$\frac{a}{p} + \frac{b}{q} \geq a^{1/p} b^{1/q},$$

et en remplaçant $a^{1/p}$ par a et $b^{1/q}$ par b,

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab.$$

Exercice. Soient a, b, c des réels positifs. Montrer que

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{a\,b\,c}$$

(comparer les logarithmes).