Préparation au CAPES de Mathématiques

Corrigé rapide du problème d'algèbre

1) φ est clairement linéaire par rapport à la première variable, symétrique (le produit dans $\mathbb{R}$ est commutatif) donc bien bilinéaire symétrique. De plus, $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(P,P) = \int_0^1 P^2 \geq 0$ et, comme $t \mapsto P(t)^2$ est continue et positive sur $[0,1]$,

$$\begin{aligned} \varphi(P,P) = 0 &\implies P \text{ nul sur } [0,1] \\ &\implies P = 0 \text{ (un polynôme de } R_n[X] \text{ a au plus } n \text{ racines)} \end{aligned}$$

φ est donc définie positive.

2) Soit $P \in F$: $P = b_1X + b_2X^2 + ... + b_nX^n$. En notant $b_i = -a_i$, on a alors :
$d(1,P)^2 = ||1-P||^2 = \int_0^1 (1 + a_1t + ... + a_nt^n)^2 dt$ et donc $d = d(1,F) = \mathrm{Inf}\{d(1,P),\ P \in F\}$.

3) P est orthogonal à F si et seulement si il est orthogonal à $X, X^2, ..., X^n$. Cela donne :

$$\begin{cases} \dfrac{a_0}{2} + \dfrac{a_1}{3} + \cdots + \dfrac{a_n}{n+2} & = 0 \\ \dfrac{a_0}{3} + \dfrac{a_1}{4} + \cdots + \dfrac{a_n}{n+3} & = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & = 0 \\ \dfrac{a_0}{n+1} + \dfrac{a_1}{n+2} + \cdots + \dfrac{a_n}{2n+1} & = 0 \end{cases}$$

4) Les n équations précédentes sont vérifiées par U puisque $T(1) = \cdots = T(n) = 0$ donc $U \in F^\perp$. D'autre part, (E, φ) est euclidien donc dim $F^\perp = n + 1 -$ dim $F = 1$. Finalement, $F^\perp = \mathrm{Vect}(U)$ (car $U \neq 0$).

5)

a) On a $1 = V(0) + \lambda U(0)$ c'est à dire (α_0 est non nul) $\lambda = \dfrac{1}{\alpha_0}$.

b) Soit P dans F. $d(1,P)^2 = ||\lambda U + (V - P)||^2 = ||\lambda U||^2 + ||V - P||^2 \geq ||\lambda U||^2$(Pythagore) avec égalité lorsque $P = V$ et donc $d^2 = ||\lambda U||^2 = \lambda^2.||U||^2$.

c) $1 - \lambda U$ est dans F (ce polynôme s'annule en 0) donc $U - \alpha_0 1 = -\alpha_0(1 - \lambda U)$ aussi et par suite ce vecteur est orthogonal à U et donc $||U||^2 = \alpha_0 < 1, U >= \alpha_0 T(0)$.

d) $T(0) = \dfrac{(-1)^n n!}{(n+1)!} = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ et, par un calcul classique, $\alpha_0 = \dfrac{(-1)^n (n+1)!}{n!}$ d'où $d^2 = \dfrac{1}{(n+1)^2}$.