Université de Rennes 1 **2006-2007**

Préparation au CAPES de Mathématiques

Problème d'algèbre

A rendre pour le jeudi 14 décembre 2006

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se propose de calculer $d^2 = \text{Inf}\left\{\int_0^1 (1 + a_1 t + ... + a_n t^n)^2 dt | a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}\right\}$.

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On pose $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, $(P, Q) \longmapsto \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ et $F = Vect\{X, X^2, ..., X^n\}$.

1) Montrer que φ est un produit scalaire. On note $\|.\|$ la norme associée à φ.

2) Montrer que d n'est autre que la distance de 1 à F.

3) Soit P le polynôme donné par $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$. Écrire le système qui traduit que P est orthogonal à F.

4) On considère la fraction rationnelle T donnée par $T(X) = \dfrac{(X-1)\cdots(X-n)}{(X+1)\cdots(X+n+1)}$ et sa décomposition en éléments simples (que l'on ne cherchera pas à calculer) :

$$T(X) = \frac{\alpha_0}{X+1} + \frac{\alpha_1}{X+2} + ... + \frac{\alpha_n}{X+n+1}$$

Soit $U = \alpha_0 + \alpha_1 X + ... + \alpha_n X^n$. Montrer que U est orthogonal à F. Quel est l'orthogonal de F ?

5) On sait que $E = F \oplus F^\perp$.

Soit alors $1 = \lambda U + V$ la décomposition de 1 avec V dans F et λU dans $F^\perp$.

a) Montrer que $\lambda = \dfrac{1}{\alpha_0}$.

b) Montrer que $d = |\lambda|.||U||$.

c) En utilisant le fait que $U - \alpha_0 1$ est dans F, montrer que $||U||^2 = \alpha_0 \varphi(U, 1) = \alpha_0 T(0)$.

d) En déduire que $d^2 = \dfrac{1}{(n+1)^2}$.