Formes quadratiques. Espaces euclidiens

d'après O. Simon, Université de Rennes 1

4 décembre 2006

Etant donnés $n \in \mathbb{N}^*$, K un corps commutatif et E un K-e.v. de dimension finie n, on note $L(E,E)$ le K-e.v. des endomorphismes de E et $M_n(K)$, l'anneau des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K.

1 Rapport entre endomorphisme, forme bilinéaire et matrice

Définition 1.1 *Une forme bilinéaire est une application ϕ de $E \times E$ dans K telle que*

- $\forall x, y, z \in E,\ \phi(x+y,z) = \phi(x,z) + \phi(y,z)$
- $\forall x, y, z \in E,\ \phi(x,y+z) = \phi(x,y) + \phi(x,z)$
- $\forall x, y \in E,\ \forall \lambda \in K,\ \phi(\lambda x, y) = \lambda \phi(x,y)$
- $\forall x, y \in E,\ \forall \lambda \in K,\ \phi(x, \lambda y) = \lambda \phi(x,y)$

On note $FB(E)$ l'ensemble des formes bilinéaires sur $E \times E$. $FB(E)$ est un K-e.v.
Si $\phi \in FB(E)$ vérifie :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \phi(x,y) = \phi(y,x)$$

on dit que ϕ est une forme bilinéaire symétrique sur E.
On note $FBS(E)$ l'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur E. $FBS(E)$ est un K-e.v.

Une forme bilinéaire est linéaire par rapport à chacune de ses variables.

Proposition 1.2 *Si on choisit une base de E, $B = (e_i)_{i=1,\dots,n}$, on a deux bijections naturelles :*

$$\begin{array}{cccc} \mu_B : & L(E,E) & \longrightarrow & M_n(K) \\ & u & \longmapsto & M_B(u) \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \gamma_B : & FB(E) & \longrightarrow & M_n(K) \\ & \phi & \longmapsto & M_B(\phi) \end{array}$$

où $M_B(u) = (u(e_1), \dots, u(e_n))$ et $M_B(\phi) = (\phi(e_i, e_j))$.
La restriction de γ_B à $FBS(E)$ induit une bijection sur l'ensemble $S_n(K)$ des matrices symétriques.

Proposition 1.3 *Ecriture matricielle*
Soient $u \in L(E,E), \phi \in FB(E), (x,y) \in E^2$. Si on choisit une base B de E, si X_B, Y_B sont les vecteurs colonnes représentant x, y dans cette base, on a (en identifiant, de manière classique, une matrice carrée d'ordre 1 avec son unique coefficient) :

- $u(x) = M_B(u) X_B$
- $\phi(x,y) = {}^t X_B M_B(\phi) Y_B$

Les applications u, ϕ ont des définitions intrinsèques, leurs valeurs pour un vecteur donné sont indépendantes du choix de la base. Mais selon ce choix, elles ont des écritures différentes.

Définition 1.4 *Soient B_1 et B_2 deux bases de E. On appelle matrice de passage de B_1 à B_2, la matrice P dont les colonnes sont les vecteurs de B_2 exprimés dans la base B_1.*

Pour un élément donné $x \in E$, si X_1 et X_2 désignent respectivement les coordonnées de x dans l'ancienne base et la nouvelle base , on a la relation matricielle :

$$X_1 = P X_2$$

Il faut noter que cette relation exprime les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles.

Proposition 1.5 *Soient $M \in M_n(K)$ et une base B_1 de E. M peut être considérée comme la matrice, dans cette base, d'un endomorphisme u ou d'une forme bilinéaire ϕ : $M = M_{B_1}(u) = M_{B_1}(\phi)$. Si B_2 est une autre base, alors on a :*

$$M_{B_2}(u) = P^{-1} M_{B_1} P \quad \textit{et} \quad M_{B_2}(\phi) = {}^t P M_{B_1} P$$

En effet, $\forall (x,y) \in E^2,\ \phi(x,y) = {}^tX_1 M_{B_1} Y_1 = {}^t(PX_2) M_{B_1} P Y_2 = {}^tX_2({}^tP M_{B_1} P) Y_2$.
En général, $P^{-1} \neq {}^tP$ et donc, à partir de la même matrice M_{B_1}, on obtient deux matrices différentes, $M_{B_2}(u),\ M_{B_2}(\phi)$.
Pour une forme bilinéaire, M_{B_1} et M_{B_2} ne sont pas forcément semblables.

Proposition 1.6 *Soit une forme bilinéaire ϕ, et soient $\hat{\phi}$ et $\tilde{\phi}$ les applications :*

$$\begin{array}{ccc} & \hat{\phi} & \\ E & \longrightarrow & E^* = L(E,K) \\ x & \longmapsto & \phi(x,.) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} & \tilde{\phi} & \\ E & \longrightarrow & E^* \\ y & \longmapsto & \phi(.,y) \end{array}$$

alors, $\hat{\phi}$ et $\tilde{\phi}$ sont des applications linéaires.

Soit $B = (e_i)_{i=1,\dots,n}$ une base de E. Notons $B^* = (e_i^*)_{1\leq i\leq n}$ la base de E^*, duale de B. On a donc, pour tout $i,\ j,\ e_i^*(e_j) = 0$ si $i \neq j$ et $e_i^*(e_i) = 1$.
Si M est la matrice de ϕ dans la base B, alors la matrice de $\hat{\phi}$ est ${}^tM$ et celle de $\tilde{\phi}$ est M. En effet, si $y = \sum_{k=1}^n y_k e_k$, alors, pout tout i de $\{1,\cdots,n\}$,

$$\hat{\phi}(e_i)(y) = \phi(e_i, y) = \sum_{k=1}^n y_k \phi(e_i, e_k) = \sum_{k=1}^n \phi(e_i, e_k) e_k^*(y)$$

D'après le calcul de changement de bases, on sait que le rang de la matrice d'une forme bilinéaire est indépendant de la base choisie.

Définition 1.7 *On appelle rang d'une forme bilinéaire ϕ, le rang, dans une base donnée de la matrice $M_B(\phi)$. On note $rang(\phi)$.*

On remarque que $rang(\phi) = rang(\hat{\phi}) = rang(\tilde{\phi})$.

Définition 1.8 *Une forme bilinéaire, est dite non dégénérée si son rang est maximum, c'est-à-dire égal à la dimension n de E.*

Définition 1.9 *Soit une forme bilinéaire symétrique ϕ,*
- *on dit que des éléments x, y de E sont orthogonaux pour ϕ, si $\phi(x,y) = 0$.*
- *si F est un sous-ensemble de E, on définit l'orthogonal de F pour ϕ, noté $F^\perp$, comme l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les éléments de F : $F^\perp = \{y \in E \mid \forall x \in F, \phi(x,y) = 0\}$. $F^\perp$ est un s.e.v. de E.*
- *on appelle noyau de la forme bilinéaire symétrique ϕ l'ensemble*

$$E^\perp = N(\phi) = \{y \in E \mid \forall x \in E, \phi(x,y) = 0\}$$

Par linéarité, pour tout sous-ensemble F, on a $F^\perp = (< F >))^\perp$ où $< F >$ désigne le s.e.v. de E engendré par F.
Pour tout $A \subset E$, on a $N(\phi) \subset A^\perp$.
On a $N(\phi) = Ker(\tilde{\phi})$.

Proposition 1.10 *Soit une forme bilinéaire ϕ. On a :*

$$dim(E) = dim(N(\phi)) + rang(\phi)$$

Théorème 1.11 *Si ϕ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée, pour tout s.e.v. F, on a*

$$dim\, F + dim\, F^\perp = dim\, E$$

Ce théorème n'implique pas que $F \cap F^\perp = \{0\}$. Chercher des contre-exemples.

Définition 1.12 *Si K est un corps ordonné, une forme bilinéaire, est dite*
- *positive si pour tout $x \in E$, $\phi(x,x) \geq 0$*
- *définie positive si elle est positive et si pour tout x de E, $\phi(x,x) = 0 \ \Leftrightarrow x = 0$.*

Remarque : Il n'y a pas d'ordre "naturel" sur $\mathbb{C}$.

Définition 1.13 *Si K est un corps ordonné, on appelle produit scalaire sur un K-espace vectoriel E, toute forme bilinéaire symétrique ϕ définie positive. On dit que E est muni du produit scalaire ϕ.*

Exercice : Si ϕ est définie positive montrer qu'elle est non dégénérée.

Définition 1.14 *Soient une forme bilinéaire ϕ, et $B = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E. On dit que B est orthogonale pour ϕ si, pour tout couple (i,j) tel que $i \neq j$, $\phi(e_i, e_j) = 0$. On dit que B est orthonormée pour ϕ si elle est orthogonale et si de plus, pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, : $\phi(e_i, e_i) = 1$.*

Sur un corps ordonné, s'il existe une base orthonormée pour ϕ, alors ϕ est définie positive, symétrique.
Exercice : Soient une forme bilinéaire ϕ, et $B = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base orthonormée de E. Alors, pour tout $x \in E$, on a $x = \sum_{i=1}^{n} \phi(x, e_i)e_i$

Proposition 1.15 *Si $car(K) \neq 2$, pour toute forme bilinéaire symétrique ϕ, il existe une base orthogonale.*

Donnedu p.36, par récurrence. Grifone seulement pour les produits scalaires.

Définition 1.16 *On dit que $M \in M_n(K)$ est une matrice orthogonale si : ${}^tMM = I_n$*

Proposition 1.17 *Si M est orthogonale, alors*
- *$det(M) = \pm 1$*
- *M est inversible et $M^{-1} = {}^tM$*
- *${}^tM$ est orthogonale et ${}^tMM = M\,{}^tM = I_n$*

Définition 1.18 *On appelle groupe orthogonal d'ordre n, le groupe multiplicatif des matrices orthogonales de $M_n(K)$,*

$$O(n,K) = \{M \in M_n(K) \mid {}^tMM = I_n\}$$

Si $M \in O(n,K)$ et $det(M) = 1$, on dit que M est orthogonale directe, et on note

$$SO(n,K) = O^+(n,K) = \{M \in O(n,K) \mid det(M) = 1\}$$

Le sous-groupe $SO(n,K)$ de $O(n,K)$ est appelé groupe spécial orthogonal, appelé aussi groupe des rotations.

Proposition 1.19 *La matrice de passage d'une base orthonormée à une autre base orthonormée est une matrice orthogonale.*

Soient en effet $B_1 = (e_i)$ et $B_2 = (V_i)$ deux bases orthomormées pour ϕ et $P : B_1 \to B_2$ (matrice de passage). Avec les abus d'écriture usuels, on a $P = (V_1, V_2, \dots, V_n)$. Notons $x_{i1}, \cdots, x_{in}$ les coordonnées de V_1 dans B_1 : $V_i = \sum_{k=1}^{n} x_{ik}e_k$. On a alors, d'une part ${}^tV_iV_j = \sum_{k=1}^{n} x_{ik}x_{jk}$, et d'autre part, $\phi(V_i, V_j) = \phi(\sum_{k=1}^{n} x_{ik}e_k, \sum_{k=1}^{n} x_{jk}e_k) = \sum_{k=1}^{n} x_{ik}x_{jk}$, car B_1 est orthonormée. Comme de plus B_2 est orthormée pour ϕ, on a finalement bien ${}^tPP = I_n$.

2 Formes quadratiques

Définition 2.1 *Une application $q : E \longrightarrow K$ est une forme quadratique sur E si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :*

1. *il existe une forme bilinéaire symétrique ϕ sur $E \times E$ telle que*
$$\forall x \in E, \;\; q(x) = \phi(x,x)$$
2. *q est une application de E dans K s'exprimant comme un polynôme de degré 2, homogène en les coordonnées, dans une base donnée de E.*

On note $FQ(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur E.

Pour toute base $B = (V_i)_{i=1,\dots n}$ de E, si $x \in E$ et $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans la base B, alors

$$q(x) = q(\sum_{i=1}^{n} x_iV_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 q(V_i) + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} x_ix_j\phi(V_i, V_j).$$

Selon la base choisie, la valeur $q(x) = \sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j$ a des écritures différentes.

Proposition 2.2 *Soient q une forme quadratique et ϕ une forme bilinéaire symétrique la définissant, alors :*

- *ϕ est unique et est appelée la forme polaire associée à q*

$$\forall x, y \in E, \ \ \phi(x,y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)) \quad \textit{(formule de polarisation)}$$

  On a une bijection :

$$\pi : FQ(E) \longrightarrow FBS(E)$$

- *Pour toute base B de E, on a une bijection*

$$FQ(E) \longrightarrow S_n(K)$$

  On note $M_B(q) = M_B(\phi)$.
- $\forall x \in E, \forall \lambda \in K, \ \ q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$

Définition 2.3 *Pour une forme quadratique q, on a les définitions associées à sa forme polaire ϕ :*

- *Le rang (resp. le noyau) d'une forme quadratique q est celui de sa forme polaire.*
- *Une forme quadratique est qualifiée de non dégénérée ou de positive ou encore de définie positive si sa forme polaire l'est.*
- *L'orthogonalité au sens d'une forme quadratique est celle au sens de sa forme polaire.*

Théorème 2.4 *(Inégalité de Cauchy - Schwarz) Si $K = \mathbb{R}$, soit q une forme quadratique positive et ϕ sa forme polaire. Alors,*

$$\forall (x,y) \in E^2, \ (\phi(x,y))^2 \leq q(x)q(y)$$

Théorème 2.5 *(Inégalité de Minkowski) Si $K = \mathbb{R}$, soit q une forme quadratique positive. Alors,*

$$\forall (x,y) \in E^2, \ \sqrt{q(x+y)} \leq \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}$$

C'est une généralisation de l'inégalité triangulaire.

Théorème 2.6 *(Théorème de Pythagore) Soient q une forme quadratique sur E et x, y dans E.*
Alors : x et y sont orthogonaux si et seulement si $q(x+y) = q(x) + q(y)$ (ou encore si et seulement si $q(x-y) = q(x) + q(y)$).

Définition 2.7 *Soit q une forme quadratique sur E.*
On dit que x est un vecteur isotrope pour q si $q(x) = 0$. On appelle cône isotrope et on note $I(q)$ l'ensemble des vecteurs isotropes pour q.

On a $N(q) \subset I(q)$.
Exercice : Soient $E = \mathbb{R}^2$ et $q(x) = x_1^2 - x_2^2$. Calculer $rang(q), \ N(q), \ I(q)$.

Théorème 2.8 *(Réduction en carrés) Soit q une forme quadratique de rang r, alors c'est une combinaison linéaire à coefficients non nuls de r carrés de formes linéaires indépendantes.*

Franchini. Voir, en exercices, la méthode de réduction de Gauss.

Théorème 2.9 *Loi d'inertie de Sylvester.*
Soient E un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension n et q une forme quadratique de rang r et de forme polaire ϕ. Alors, il existe une base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$orthogonale pour ϕ dans laquelle, si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$,

$$q(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{r} x_i^2$$

Pour toute autre base, $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$, telle que $x = \sum_{i=1}^n y_i f_i$, et $q(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_i^2 - \sum_{i=m+1}^{r} y_i^2$, on a $m = p$.

Donnedu p.76

Définition 2.10 *On appelle signature d'une forme quadratique q le couple d'entiers (p,s) tel que, dans une décomposition en carrés indépendants, p est le nombre de termes positifs et s le nombre de termes négatifs. On a $p + s = r = rang(q)$.*

3 Espace euclidien. Matrices symétriques à coefficients réels, $S_n(\mathbb{R})$

Définition 3.1 *On appelle espace préhilbertien réel tout $\mathbb{R}$-e.v. E, muni d'un produit scalaire. On appelle espace euclidien tout $\mathbb{R}$-e.v. E, de dimension finie, muni d'un produit scalaire.*

Si ϕ désigne le produit scalaire, on note, pour $(x,y) \in E^2$, $\phi(x,y) =< x,y >$; d'où la notation pour désigner un espace préhilbertien réel ou euclidien : $(E, <,>)$.

Soit E un espace préhilbertien réel. On a les notions de norme et de distance :

$$\forall x \in E, \ \| x \|^2 =< x,x >, \quad d(x,y) = \| x - y \|$$

Proposition 3.2 *Dans un espace euclidien, il existe au moins une base orthonormée pour le produit scalaire.*

A partir d'une base quelconque, on peut en obtenir une par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt. (voir en exercice)

On a la traduction du théorème de Pythagore et des inégalités avec des précisions :

Théorème 3.3 *Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien. Alors,*

1. *(théorème de Pythagore) Soit $(x,y) \in E^2$. Les vecteurs x et y sont orthogonaux si et seulement si $\| x+y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2$ (ou encore si et seulement si $\| x-y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2$).*
2. *(inégalité de Cauchy - Schwarz) $\forall (x,y) \in E^2$, $(< x,y >)^2 \leq \| x \|^2 \times \| y \|^2$ avec égalité si et seulement si x et y sont liés.*
3. *(inégalité de Minkowski)*
$$\forall (x,y) \in E^2 \quad \| x+y \| \leq \| x \| + \| y \|$$
$$\text{Avec l'égalité si et seulement si } \begin{cases} x = 0 \\ ou \\ \exists \lambda \geq 0, \ y = \lambda x \end{cases}$$

Proposition 3.4 *Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien, alors, pour tout s.e.v. F, on a*

$$F \oplus F^{\perp} = E$$

Définition 3.5 *Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien. Pour tout s.e.v. F, on définit P_F la projection orthogonale sur F (i.e. parallèlement à $F^{\perp}$) et S_F la symétrie orthogonale par rapport à F par : si $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in F^{\perp}$ alors*

$$P_F(x) = x_1 \quad et \quad S_F(x) = x_1 - x_2$$

On peut vérifier que P_F et S_F sont des endomorphismes de E.

Proposition 3.6 *Soient $(E, <,>)$ un espace euclidien et F un s.e.v., admettant une base orthonormée $\{e_1, \dots, e_p\}$. Alors*

$$P_F(x) = \sum_{i=1}^{p} < x, e_i > e_i$$

Définition 3.7 *Soient $(E, <,>)$ un espace euclidien, F un s.e.v. et $x \in E$. On définit la distance de x à F par :*

$$d(x,F) = inf_{y \in F} \| x - y \|$$

Définition 3.8 *Soient E un espace préhilbertien réel et u un endomorphisme de E. On dit que u admet un adjoint s'il existe $g \in L(E,E)$ tel que : $\forall (x,y) \in E^2$, $< u(x), y > = < x, g(y) >$. Si un tel g existe, il est unique et on l'appelle l'adjoint de u que l'on note u^*.*

Proposition 3.9 *Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien. Tout endomorphisme de E admet un adjoint.*

Grifone p. 294, Monier p. 166.

Définition 3.10 *Un endomorphisme u de E est dit*
- *symétrique ou auto-adjoint si :* $\forall (x,y) \in E^2, \;\; < u(x), y > = < x, u(y) >$.
- *orthogonal si :* $\forall (x,y) \in E^2, \;\; < u(x), u(y) > = < x, y >$.

Les endomorphismes orthogonaux conservent les distances ; ce sont les isométries vectorielles. L'ensemble de ces endomorphismes forment un groupe noté $O(E)$. On remarquera qu'une projection orthogonale différente de I_E n'est pas un endomorphisme orthogonal.

Proposition 3.11 *Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien. Dans une base orthomormée de E, la matrice d'un endomorphisme auto-adjoint est symétrique et, réciproquement, toute matrice symétrique représente un endomorphisme auto-adjoint dans une base orthonormée.*

En effet, si $M = M_B(u)$ avec u auto-adjoint alors $\forall X, Y$, ${}^t(MX)Y = {}^tX(MY)$ donc ${}^tX\,{}^tMY = {}^tXMY$ et on obtient bien ${}^tM = M$.

Théorème 3.12 *Soit u un endomorphisme auto-adjoint de l'espace euclidien E. Alors :*
- *les valeurs propres de u sont toutes réelles.*
- *les sous-espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux.*
- *u est diagonalisable*

Démonstration : Donnedu par l'absurde ; Monier par récurrence. Grifone p. 292

En termes de matrices : toute matrice symétrique réelle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et les s.e.p. sont deux à deux orthogonaux pour le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$.
De plus, dans chaque sous-espace propre, on peut trouver une base orthonormée pour $<,>$ (procédé d'orthonormalisation de Schmidt), ce qui donne une base orthonormée de vecteurs propres de E.

Proposition 3.13 *Pour toute matrice symétrique réelle M, il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que :* $\quad M = PDP^{-1}$.

En effet, si $B = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base orthonormée, M une matrice symétrique, $V = (V_i)_{1\leq i\leq n}$ une base orthonormée de vecteurs propres et P la matrice de passage, alors ${}^tPP = I_n$, donc ${}^tP = P^{-1}$ et ainsi

$$
{}^tPMP = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \\ 0 & \dots & & \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}
$$

D'où le résultat.

Remarque : Une matrice symétrique complexe n'est pas toujours diagonalisable ! Par exemple,

$$
M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2i \end{pmatrix}
$$

a pour polynôme caractéristique $P_M(X) = X^2 - 2iX - 1 = (X - i)^2$ et comme $M \neq iI_2$, M n'est pas diagonalisable.

Théorème 3.14 *Réduction simultanée*
Soient E un espace euclidien et ϕ une forme bilinéaire symétrique sur $E \times E$. Il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de ϕ est diagonale.

Donnedu p.138. Cette base est orthonormée pour $<,>$ et orthogonale pour ϕ.

Proposition 3.15 *Réduction simultanée de deux formes quadratiques.*
Soient q et q' deux formes quadratiques sur un $\mathbb{R}$-e.v. E. Si q est définie positive, il existe une base de E dans laquelle les matrices de q et q' sont respectivement représentées par I_n et D, matrice diagonale de $M_n(\mathbb{R})$.

Le tableau ci-dessous donne les différentes étapes pour construire effectivement une telle base, à partir d'une base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ de E. On peut retrouver la réduction de Gauss pour q' (mais on perd alors la matrice identité pour q) en prenant la base $X_i = \dfrac{U_i}{\sqrt{|\lambda_i|}}$ pour $i = 1, \dots, n$:

$$
M_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} & & \dots \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N_4 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & & \dots \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \varepsilon_n \end{pmatrix}
$$

Schéma de l'algorithme de la réduction simultanée de deux formes quadratiques :

Sur une même ligne, les matrices de q_1, q_2 et u sont écrites dans une même base, celle désignée en première colonne.

Base	Matrice de passage	$M(q_1)$ q forme quadratique définie positive	$M(q_2)$ q' forme quadratique	$M(u)$ u endomorphisme
(e_i)		M	N	
(V_i) orthonormée pour q	P	$M_1 = {}^tPMP = I_n$	$N_1 = {}^tPNP$	$A = N_1$
(W_i) vecteurs propres de A orthogonaux pour q_1	P_1	$M_2 = {}^tP_1 I_n P_1 = \begin{pmatrix} \Vert W_1\Vert^2 & 0 & .. & 0 \\ 0 & \Vert W_2\Vert^2 & & \dots \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & \dots & .. & \Vert W_n\Vert^2 \end{pmatrix}$	$N_2 = {}^tP_1 N_1 P_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \Vert W_1\Vert^2 & 0 & .. & 0 \\ 0 & \lambda_2 \Vert W_2\Vert^2 & & \dots \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & \dots & .. & \lambda_n \Vert W_n\Vert^2 \end{pmatrix}$	$D = P_1^{-1} A P_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & .. \\ .. & .. & & .. \\ 0 & .. & .. & \lambda_n \end{pmatrix}$
$(U_i) = \left(\dfrac{W_i}{\Vert W_i \Vert}\right)$	P_2	$M_3 = {}^tP_2 M_2 P_2 = I_n$	$N_3 = {}^tP_2 N_2 P_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & .. \\ .. & .. & & .. \\ 0 & .. & .. & \lambda_n \end{pmatrix}$	

1. On part de $M = M(q)$ et $N = M(q')$ dans une base (e_i)
2. On transforme M en I_n dans une base (V_i), on écrit $N_1 = M(q')$ dans cette base
3. On considère $A = N_1$ comme matrice symétrique d'un endomorphisme u dans l'espace euclidien (E, q)
4. La matrice A admet une base de vecteurs propres (W_i) orthogonaux pour q, d'où les deux matrices diagonales dans cette base
5. On normalise cette base en (U_i)

4 Forme sesquilinéaire. Espace hermitien

Ce sujet n'est pas traité ici. En l'étudiant, il est conseillé de mettre en parallèle les notions et les résultats sur ce sujet avec ceux sur les formes quadratiques et les espaces euclidiens. Comparer, pour chaque énoncé de théorème, les hypothèses, les conclusions.

Comparaison du vocabulaire

sur un corps K	sur $\mathbb{C}$
forme bilinéaire	forme sesquilinéaire
forme bilinéaire symétrique	forme sesquilinéaire hermitienne
forme quadratique	forme hermitienne
éléments orthogonaux	éléments orthogonaux
matrice symétrique $A = {}^tA$	matrice hermitienne $A = {}^t\overline{A}$
sur $K = \mathbb{R}$	sur $\mathbb{C}$
espace préhilbertien réel	espace préhilbertien complexe
espace euclidien	espace hermitien
auto-adjoint ou symétrique	auto-adjoint ou hermitien
projection orthogonale	projection orthogonale
endomorphisme orthogonal	endomorphisme unitaire
groupe $O(E)$	groupe $U(E)$
...	...

5 Factorisation QR ou décomposition de Householder

Position du problème :
Résolution d'un système linéaire à m équations et n inconnues : $AX = Y$.
Mise sous forme triangulaire : on veut obtenir $A = QR$, où Q est une matrice $m \times m$ orthogonale et R une matrice $m \times n$, de forme triangulaire supérieure :

$$R = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \dots & \\ 0 & \alpha_2 & & \\ 0 & \dots & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque : Dans un espace euclidien, un endomorphisme orthogonal f conserve, par définition, le produit scalaire et donc la distance et la norme. Dans toute base orthonormée, f est orthogonal si et seulement si sa matrice est orthogonale.
Description de l'algorithme :
La première étape de l'algorithme : trouver une matrice $m \times m$ orthogonale H_1 telle que, si $A = A_0 = (a_{ij})$, alors

$$H_1 A = A_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \dots \\ 0 & a'_{ij} & \\ \dots & \dots & \\ 0 & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Si la première colonne de A est $\overrightarrow{V_1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$, alors il n'y a rien à faire ; sinon, il faut trouver une matrice $H_1 \in O(m, \mathbb{R})$ et un nombre réel α_1, tels que $H_1 \overrightarrow{V_1} = \alpha_1 \vec{e_1}$.
A la $(p-1)$ ième étape, on a obtenu

$$A_{p-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \dots & \dots & \\ 0 & \alpha_2 & & & \\ \dots & \dots & \alpha_{p-1} & & \\ 0 & \dots & 0 & b_{pp} & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & b_{mp} & \dots \end{pmatrix}$$

Si $\overrightarrow{V_p} = \begin{pmatrix} b_{pp} \\ b_{p+1p} \\ \dots \\ b_{mp} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} b_{pp} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$, il faut trouver $\hat{H}_p \in O(m-p+1, \mathbb{R})$ et $\alpha_p \in \mathbb{R}$ tels que $\hat{H}_p \overrightarrow{V_p} = \alpha_p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$; on pose alors

$$H_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \hat{H}_p \\ 0 & \dots & 0 & \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_p = H_p A_{p-1}.$$

Après la $n$ième étape, on obtient

$$H_n H_{n-1} \dots H_1 A = R$$

d'où $A = H_1^{-1} \dots H_n^{-1} R = QR$, avec $Q \in O(m, \mathbb{R})$.

Définition 5.1 *Etant donné un vecteur colonne $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$ de norme 1 ($^t\vec{u}\vec{u} = 1$), on appelle matrice élémentaire de Householder, la matrice $H = I_m - 2\vec{u}\,^t\vec{u}$.*

$$\text{Si } \vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} \text{ alors } H = \begin{pmatrix} 1-2x_1^2 & \dots & -2x_1x_j & \dots \\ -2x_2x_1 & 1-2x_2^2 & & \\ & \dots & & \\ -2x_ix_1 & \dots & & \dots \\ -2x_mx_1 & \dots & & 1-2x_mx_m \end{pmatrix}$$

Proposition 5.2 *Une matrice de Householder est symétrique et orthogonale.*

En effet, d'une part ${}^tH = I_m - 2\,{}^t(\vec{u}\,{}^t\vec{u}) = I_m - 2\,{}^t({}^t\vec{u})\,{}^t\vec{u} = H$ et d'autre part, comme ${}^t\vec{u}\vec{u} = 1$,

$$ {}^tHH = H^2 = I_m - 4\vec{u}\,{}^t\vec{u} + 4\vec{u}\,({}^t\vec{u}\vec{u})\,{}^t\vec{u} = I_m $$

Proposition 5.3 <u>*Interprétation géométrique*</u>
Un endomorphisme admet pour matrice une matrice de Householder H, si et seulement si c'est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan P, orthogonal au vecteur $\vec{u}$ définissant H.

Démonstration :
On a $\mathbb{R}^m = P \oplus \mathrm{Vect}(\vec{u})$. Soit $\vec{v} \in \mathbb{R}^m$; on peut écrire $\vec{v} = \vec{v_1} + x_1\vec{u}$ de manière unique avec $\vec{v_1} \in P$ et $x_1 =< \vec{u}, \vec{v} >$.
Alors, d'une part, si S_P est la symétrie orthogonale par rapport à P, on a

$$ S_P(\vec{v}) = \vec{v_1} - < \vec{u}, \vec{v} > \vec{u} = \vec{v} - 2 < \vec{u}, \vec{v} > \vec{u} $$

d'autre part, le produit matriciel étant associatif :

$$ H(\vec{v}) = \vec{v} - 2(\vec{u}\,{}^t\vec{u})\,\vec{v} = \vec{v} - 2\vec{u}\,({}^t\vec{u}\,\vec{v}) $$

Comme ${}^t\vec{u}\,\vec{v} =< \vec{u}, \vec{v} >$ est un scalaire, il commute avec $\vec{u}$. Ainsi les deux endomorphismes H et S_P coïncident sur $\mathbb{R}^m$.

Théorème 5.4 *Etant donnés deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ de $\mathbb{R}^m$ non colinéaires avec $\|\vec{b}\| = 1$, on peut déterminer un vecteur $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$ de norme 1 et un nombre réel α tels que si $H = I_m - 2\vec{u}\,{}^t\vec{u}$ alors $H(\vec{a}) = \alpha\vec{b}$.*

Démonstration :
On raisonne par analyse et synthèse.
Soient $H, \vec{u}, \alpha$ satisfaisant le résultat. Comme H est orthogonale, on a $\|H(\vec{a})\| = \|\vec{a}\|$ et donc $\|\vec{a}\| = |\alpha|$, d'où $\alpha = \pm\|\vec{a}\|$, si $\epsilon = \pm 1$, on pose $\alpha = \epsilon\|\vec{a}\|$.
Comme $H(\vec{a}) = \alpha\vec{b}$, alors

$$ \vec{a} - 2\vec{u}\,{}^t\vec{u}\,\vec{a} = \alpha\vec{b} $$

Donc, $\vec{a} - \alpha\vec{b} = 2\vec{u}\,({}^t\vec{u}\,\vec{a})$ et comme ${}^t\vec{u}\,\vec{a}$ est un scalaire (non nul puisque $\vec{a}$ n'est pas colinéaire à $\vec{b}$), $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{a} - \alpha\vec{b}$. Ce vecteur étant de plus de norme 1, on a finalement $\vec{u} = \pm\dfrac{\vec{a} - \alpha\vec{b}}{\|\vec{a} - \alpha\vec{b}\|}$.

Réciproquement, si $\alpha = \|\vec{a}\|$, $\vec{u} = \dfrac{\vec{a} - \alpha\vec{b}}{\|\vec{a} - \alpha\vec{b}\|}$ et $H = I_m - 2\vec{u}\,{}^t\vec{u}$, alors

$$ \begin{aligned} H(\vec{a}) &= \vec{a} - 2\vec{u}\,{}^t\vec{u}\,\vec{a} = \vec{a} - 2\frac{(\vec{a} - \alpha\vec{b})({}^t\vec{a} - \alpha\,{}^t\vec{b})\vec{a}}{\|\vec{a} - \alpha\vec{b}\|^2} \\ &= \vec{a} - 2\frac{\vec{a}\,{}^t\vec{a}\,\vec{a} - \alpha\vec{a}\,{}^t\vec{b}\,\vec{a} - \alpha\vec{b}\,{}^t\vec{a}\,\vec{a} + \alpha^2\vec{b}\,{}^t\vec{b}\,\vec{a}}{\|\vec{a}\|^2 - 2\alpha < a, b > + \alpha^2.1} \\ &= \vec{a} - \frac{\vec{a}\,(\|\vec{a}\|^2 - \alpha\,{}^t\vec{a}\vec{b}) - \alpha\vec{b}(\|a\|^2 - \alpha\,{}^t\vec{a}\vec{b})}{\|\vec{a}\|^2 - \alpha\,{}^t\vec{a}\,\vec{b}} \qquad \text{car } {}^t\vec{b}\,\vec{a} = {}^t\vec{a}\,\vec{b} \text{ (scalaire)} \\ &= \alpha\vec{b} \end{aligned} $$

<u>Remarque</u> : Les vecteurs $\vec{a} - \|\vec{a}\|\vec{b}$ et $\vec{a} + \|\vec{a}\|\vec{b}$ sont orthogonaux.

Proposition 5.5 *Toute matrice $m \times n$ A peut être factorisée sous la forme $A = QR$, où Q est une matrice $m \times m$ orthogonale et R une matrice, $m \times n$, de forme triangulaire supérieure :*

$$ R = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \dots & \\ 0 & \alpha_2 & & \\ 0 & \dots & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} $$

Si A est une matrice $n \times n$ inversible, la matrice R est de triangulaire supérieure et inversible.

Références

[Audin] De la licence à l'agrégation, Géométrie, Michèle Audin. Belin, Editions espace 34.

[Ciarlet] Exercices d'analyse numérique matricielle et d'optimisation. P.G.Ciarlet, B.Miara, J.M. Thomas. Editeur Masson, 1986

[Donnedu] Espaces euclidiens et hermitiens. Géométries. Tome 3. A. Donnedu, Vuibert, 1977

[Grifone] Algèbre linéaire. Joseph Grifone. Cepadues-Editions, 1990

[Lascaux] Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur, Tome 1. P.Lascaux, R. Théodor. Editeur Masson,1993

[Monier] Algèbre 2, cours et 500 exercices corrigés. Jean-Marie Monier. Dunod 2000