Préparation au CAPES de Mathématiques

Corrigé rapide du contrôle du jeudi 17 décembre 2009

Exercice n°1

Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. On a $x^2 \equiv 0\ [3]$ ou $x^2 \equiv 1\ [3]$ et par suite,

$$x^2 + y^2 \equiv 0\ [3] \Longleftrightarrow (x \equiv 0\ [3] \text{ et } y \equiv 0\ [3])$$

Soit alors $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ tel que $x^2 + y^2 = 3z^2$. Si $(x, y, z) \neq 0$, on peut, quitte à diviser par $(\text{pgcd}(x, y, z))^2$, supposer x , y et z sont premiers entre eux. Ce qui précède montre d'autre part que x et y sont multiples de 3 : $x = 3k$ et $y = 3k'$. Mais alors $z^2 = 3k^2 + 3k'^2$ est multiple de 3 donc z aussi (car 3 est premier).

Conclusion : $\{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3,\ x^2 + y^2 = 3z^2\} = \{(0, 0, 0)\}$.

Exercice n°2

Par hypothèse, on peut écrire $B = P^{-1}AP$ avec $P \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C})$. On décompose la matrice P en parties réelles et imaginaires en écrivant $P = R + iS$ avec $R, S \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$. De $PB = AP$, il vient alors (par identification) $RB = AR$ et $SB = AS$ et donc : $\forall x \in \mathbb{C},\ (R + xS)B = A(R + xS)$. Le polynôme en x $Q(x) = \det\ (R + xS)$ n'est pas identiquement nul (car par hypothèse $Q(i) \neq 0$) donc il a un nombre fini de racines et en particulier : $\exists x \in \mathbb{R}$, $\det\ (R + xS) \neq 0$. Pour une telle valeur de x, la matrice réelle $R + xS$ est inversible et le résultat attendu en découle.

Exercice n°3

1) On a $\det\ ({}^tAA) = \det\ (I) = 1$ donc $(\det A)^2 = 1$ et $\det A = \pm 1$.
Soit d'autre part x un vecteur propre de f associé à la valeur propre réelle λ.
On a alors $\|f(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\,.\|x\|$ et f conservant la norme on déduit bien : $|\lambda| = 1$.

2)a) Si les trois valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de A sont réelles, alors on a $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = +1$ avec $\lambda_i = \pm 1$ et 1 est bien valeur propre d'ordre 1 ou 3. Si l'une des valeurs propres (par exemple λ_2) n'est pas réelle alors sa conjuguée est aussi valeur propre (c'est par exemple λ_3) et donc $+1 = \det A = \lambda_1\lambda_2\overline{\lambda_2} = \lambda_1$.

b) Soit $y \in E_1^\perp$. Pour tout x de E_1 on a $< f(y), x > = < f(y), f(x) > = < y, x > = 0$ donc $f(x) \in E_1^\perp$. $E_1^\perp$ est donc bien stable par f.

c) Supposons par l'absurde $\dim(E_1) \neq 1$. Comme $A \neq I$ on déduit que le sous-espace propre E_1 n'est pas de dimension trois donc qu'il est de dimension deux (1 est alors valeur propre triple). Soit alors $u \neq 0 \in E_1^\perp$. La question précédente montre que $f(u) \in E_1^\perp$ et comme $E_1^\perp$ est une droite, $f(u) = \lambda u$ pour un certain scalaire λ. On a alors $f(u) = u$ (1 est la seule valeur propre) et $u \in E_1$ ce qui est absurde.

d) Soit $\tilde{f} = f/_{E_1^\perp}$. Pour x, y dans $E_1^\perp$ on a $<\tilde{f}(x),\ \tilde{f}(y)> = <f(x),\ f(y)> = <x, y>$ donc $\tilde{f}$ est orthogonale. De plus, si (u_1, u_2) est une base de Π et v un vecteur non nul de E_1, la matrice de f dans la base (u_1, u_2, v) s'écrit $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = M(\tilde{f})_{(u_1,u_2)}$. Le déterminant étant invariant par changement de base, on déduit $\det\ (\tilde{f}) = +1$ et $\tilde{f}$ est donc bien une rotation.

3) Si $\det A = -1$ alors de même -1 est valeur propre d'ordre 1 ou 3, E_{-1} est de dimension 1, $E_{-1}^{\perp}$ est invariant par f et $f/_{E_{-1}^{\perp}}$ est une rotation.

Exercice n°4

Soit f une isométrie fixant quatre points non coplanaires A_1, A_2, A_3, A_4. Supposons que f ne soit pas l'identité et soit alors M tel que $M \neq f(M)$. Si $\mathcal{P}$ désigne le plan médiateur de M et $f(M)$, $\forall i \in \{1, \cdots, 4\}$, $d(A_i, M) = d(f(A_i), f(M)) = d(A_i, f(M))$ donc $A_i \in \mathcal{P}$ ce qui est contradictoire.
De même, si f fixe trois points non alignés A_1, A_2, A_3 et si f n'est pas l'identité alors, avec les mêmes notations, $\forall i \in \{1, \cdots, 3\}$, $A_i \in \mathcal{P}$ donc $\mathcal{P} = (A_1A_2A_3)$ avec $M \notin \mathcal{P}$. Par suite, $s_{\mathcal{P}} \circ f$ fixe les quatre points non coplanaires A_1, A_2, A_3, M donc est l'identité et finalement $f = s_{\mathcal{P}}$.
Si f fixe deux points distincts A_1, A_2 et si f n'est pas l'identité, on a toujours $A_1, A_2 \in \mathcal{P}$ et $M \notin \mathcal{P}$ et donc $s_{\mathcal{P}} \circ f$ fixe les trois points non alignés A_1, A_2, M donc $s_{\mathcal{P}} \circ f = id$ ou $s_{\mathcal{P}} \circ f = s_{(A_1A_2M)}$ et finalement $f = s_{\mathcal{P}}$ ou $f = s_{\mathcal{P}} \circ s_{(A_1A_2M)}$.
Si f fixe le point A_1 et si f n'est pas l'identité, on a toujours $A_1 \in \mathcal{P}$ et $M \notin \mathcal{P}$ et donc $s_{\mathcal{P}} \circ f$ fixe les deux points distincts A_1 et M donc $s_{\mathcal{P}} \circ f = id$ ou $s_{\mathcal{P}} \circ f = s_{\mathcal{P}_1}$ ou $s_{\mathcal{P}} \circ f = s_{\mathcal{P}_1} \circ s_{\mathcal{P}_2}$ et finalement $f = s_{\mathcal{P}}$ ou $f = s_{\mathcal{P}} \circ s_{\mathcal{P}_1}$ ou $f = s_{\mathcal{P}} \circ s_{\mathcal{P}_1} \circ s_{\mathcal{P}_2}$
Soit finalement f une isométrie quelconque. Si f n'est pas l'identité (composée d'une réflexion avec elle-même), $s_{\mathcal{P}} \circ f$ fixe le point M donc est la composée d'au plus trois réflexions. Par suite, f est la composée d'au plus quatre réflexions.

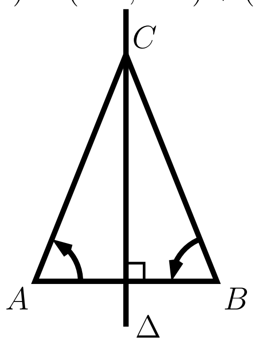
Exercice n°5

1) On a donc $\mathcal{P} = (\mathbb{R}(u-v))^{\perp}$ et $E = \mathcal{P} \oplus \mathbb{R}(u-v)$. D'autre part, $< u+v,\, u-v >= \|u\|^2 - \|v\|^2 = 0$. Comme $u = \frac{1}{2}(u+v) + \frac{1}{2}(u-v)$ avec $\frac{1}{2}(u+v) \in \mathcal{P}$ et $\frac{1}{2}(u-v) \in \mathbb{R}(u-v)$, on a, par définition de $s_{\mathcal{P}}$, $s_{\mathcal{P}}(u) = \frac{1}{2}(u+v) - \frac{1}{2}(u-v) = v$.

2) On a $s_{\mathcal{Q}}(v-u) = s_{\mathcal{Q}}(v) - s_{\mathcal{Q}}(u) = s_{\mathcal{Q}}(s_{\mathcal{Q}}(u)) - v$ donc $s_{\mathcal{Q}}(v-u) = u - v$. Soit alors $q \in \mathcal{Q}$. $< q,\, u-v >=< s_{\mathcal{Q}}(q),\, s_{\mathcal{Q}}(v-u) >=< q,\, v-u >$ car $s_{\mathcal{Q}}$ est un endomorphisme orthogonal. Par suite, $< q,\, u-v >= 0$ et $q \in \mathcal{P}$. Finalement $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ et donc $\mathcal{Q} = \mathcal{P}$ (ces deux sous-espaces ont en plus même dimension).

Exercice n°6

$-id_X$ est une rotation (nous sommes en dimension 2) et les rotations conservent les angles orientés de vecteurs donc $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) = (\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}})$. La relation de Chasles donne alors $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) + (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) + (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}}) + (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) = (\widehat{\overrightarrow{AB}, -\overrightarrow{AB}}) = p$.



Soit Δ la médiatrice de $[AB]$ et s la réflexion d'axe Δ. s échange A et B, et laisse C invariant. Comme les réflexions inversent les angles, $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) = -(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}})$. Le résultat découle alors de la question précédente.

Exercice n°7

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}(4 - x^2)$. Notons que la suite $(u_n)_n$ est bien définie car f est définie sur $\mathbb{R}$. De plus le graphe de f est une parabole atteignant son maximum en zéro, et valant

zéro en 2. En particulier l'intervalle $]0,2[$ est stable par f, et donc $(u_n)_n$ prend ses valeurs dans $]0,2[$. Le seul point fixe de f dans cet intervalle est $c = \frac{-5+\sqrt{21}}{2}$.
La fonction f étant décroissante sur $]0,2[$, sa composée $f \circ f$ est croissante et les suites extraites paires et impaires sont monotones. Étant bornées, elles convergent, vers un point fixe de $f \circ f$. Ces points fixes sont les points fixes de f et les racines du polynôme $\frac{f \circ f(x) - x}{f(x)-x}$ qui est de degré 2. Ces dernières valent $r_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et $r_2 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ et sont dans $]0,2[$, avec $r_1 < c < r_2$.
Il reste à déterminer les limites des suites extraites paires et impaires en fonction de la valeur de u_0 pour connaître le comportement de $(u_n)_n$.
Si $u_0 \in]0, r_1]$, alors $(u_{2n})_n$ croît vers r_1 et $(u_{2n+1})_n$ décroît vers r_2.
Si $u_0 \in]r_1, c[$, alors $(u_{2n})_n$ décroît vers r_1 et $(u_{2n+1})_n$ croît vers r_2.
Si $u_0 = c$, la suite $(u_n)_n$ est constante. C'est le seul cas de convergence.
Si $u_0 \in]c, r_2]$, alors $(u_{2n})_n$ croît vers r_2 et $(u_{2n+1})_n$ décroît vers r_1.
Si $u_0 \in]r_2, 2[$, alors $(u_{2n})_n$ décroît vers r_2 et $(u_{2n+1})_n$ croît vers r_1.

Exercice n°8

La série ne vérifie pas les hypothèses du critère spécial aux séries alternées (pas de décroissance). On ne peut utiliser le théorème de comparaison par équivalent car le terme général n'est pas de signe constant. On effectue donc un développement limité du terme général :

$$\frac{(-1)^n}{(-1)^n + \sqrt{n}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^{3/2}}).$$

Le premier terme donne une série convergente (car alternée et vérifiant les hypothèses du critère spécial), le second une série divergente (série harmonique) et le troisième une série absolument convergente (comparaison avec une série de Riemann). Au final la série est donc divergente.

Exercice n°9

La fonction intégrée est continue sur $[1, \infty[$ donc est localement intégrable sur cet intervalle. L'intégrale est donc généralisée en ∞ uniquement. On effectue une intégration par parties pour augmenter le degré du numérateur en vue de comparer l'intégrale étudiée avec les intégrales de Riemann. Soit $A > 1$.

$$\int_1^A \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \left[-\frac{\cos x}{\sqrt{x}} \right]_1^A - \frac{1}{2} \int_1^A \frac{\cos x}{x^{3/2}} dx.$$

Or $\frac{\cos A}{\sqrt{A}}$ tend vers zéro quand A tend vers ∞ alors que l'intégrale de droite converge absolument par comparaison avec une intégrale de Riemann. Donc l'intégrale de départ converge.