Chapitre 4

Comparaison des fonctions. Développements limités

4.1 Comparaison locale des fonctions

On veut comparer des fonctions “quand x tend vers a”. Ici a pourra être un réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$. Nous convenons ici que *toutes les fonctions considérées sont définies*
- *si $a \in \mathbb{R}$: sur un intervalle ouvert contenant a, sauf peut-être en a;*
- *si $a = +\infty$ (resp. $a = -\infty$) : sur un intervalle de la forme $]M, +\infty[$ (resp. $]-\infty, M[$).*

On dit de manière générale que $f(x)$ *vérifie une propriété P au voisinage de a* quand :
- si $a \in \mathbb{R}$: il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que $f(x)$ vérifie P pour tout $x \in I \cap D_f$.
- si $a = +\infty$ (resp. $a = -\infty$) : il existe un intervalle I de la forme $]M, +\infty[$ (resp. $]-\infty, M[$) tel que $f(x)$ vérifie P pour tout $x \in I$.

4.1.1 Fonctions équivalentes

Définition 4.1 *On dit que $f(x)$* est équivalent à *$g(x)$* quand *x* tend vers *a quand il existe une fonction $h(x)$ telle que $f(x) = g(x)h(x)$ et que $\lim_{x\to a} h(x) = 1$. Si g ne s'annule pas au voisinage de a, sauf peut-être en a, ceci revient à dire que $\lim\limits_{x\to a}(f(x)/g(x)) = 1$. On note $f(x) \sim_{x\to a} g(x)$.*

On n'oubliera pas de toujours préciser en quel point les fonctions sont équivalentes, ou du moins de le garder toujours présent à l'esprit.

Voici quelques exemples d'équivalents classiques *quand x tend vers* 0 (les quatre premiers sont dans le formulaire du bac). On peut vérifier toutes ces équivalences par la règle de l'Hospital.

$$\begin{array}{ccc} e^x - 1 \sim x & \ln(1+x) \sim x & ((1+x)^\alpha - 1) \sim \alpha x \\ \sin x \sim x & \tan x \sim x & (\cos x - 1) \sim -x^2/2 \\ \operatorname{sh} x \sim x & \operatorname{th} x \sim x & (\operatorname{ch} x - 1) \sim x^2/2 \end{array}$$

Exercice. Comme illustration de la mise en garde sur la nécessité de préciser en quel point les équivalences ont lieu, vérifier qu'aucune des équivalences ci-dessus n'a lieu quand x tend vers $+\infty$, sauf la troisième pour une seule valeur de α : préciser laquelle.

Voici quelques propriétés de l'équivalence.

Proposition 4.2 *Quand x tend vers a :*

1. *L'équivalence de fonctions est une relation d'équivalence : $f(x) \sim f(x)$ (réflexivité) ; $f(x) \sim g(x)$ entraîne $g(x) \sim f(x)$ (symétrie) ; $f(x) \sim g(x)$ et $g(x) \sim h(x)$ entraînent $f(x) \sim h(x)$ (transitivité).*
2. *Si $f_1(x) \sim g_1(x)$ et $f_2(x) \sim g_2(x)$, alors $(f_1 f_2)(x) \sim (g_1 g_2)(x)$.*
3. *Si $f_1(x) \sim g_1(x)$ et $f_2(x) \sim g_2(x)$, et si $g_2(x)$ ne s'annule pas au voisinage de a (sauf peut-être en a), alors $(f_1/f_2)(x) \sim (g_1/g_2)(x)$.*

Démonstration: Contentons nous ici de vérifier la troisième propriété. On suppose que $f_i(x) = h_i(x) g_i(x)$ avec $\lim_{x\to a} h_i(x) = 1$, pour $i = 1, 2$. Si $g_2(x)$ ne s'annule pas au voisinage de a, alors $f_2(x) = h_2(x) g_2(x)$ non plus. On a $(f_1/f_2)(x) = (h_1/h_2)(x) \times (g_1/g_2)(x)$, avec $\lim_{x\to a}(h_1/h_2)(x) = 1$. $\square$

Exercice. Vérifier les autres propriétés de la proposition.

Il faut se méfier des sommes : si, quand x tend vers a, on a $f_1(x) \sim g_1(x)$ et $f_2(x) \sim g_2(x)$, on n'a pas forcément $(f_1+f_2)(x) \sim (g_1+g_2)(x)$. Par exemple on a $\sin x \sim x$ et $\tan x \sim x$ quand x tend vers 0, mais on n'a pas $\tan x - \sin x \sim 0$!

On ne peut pas non plus composer des équivalents. Par exemple, on a $x \sim x+1$ quand x tend vers $+\infty$, mais e^x n'est pas équivalent à e^{x+1} quand x tend vers $+\infty$!

L'usage des équivalents (quand x tend vers a) permet de calculer certaines limites (en a). Par exemple, quand x tend vers 0,

$$x^2\left((1+x)^3 - 1\right) \sim x^2 \times 3x = 3x^3 \quad \text{et} \quad \sin x(1-\cos x) \sim x \times \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{2},$$

et donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\left((1+x)^3-1\right)}{\sin x(1-\cos x)} = 6.$$

4.1.2 Fonction négligeable devant une autre, dominée par une autre

Définition 4.3 *On dit que $f(x)$* est négligeable devant *$g(x)$* quand *x* tend vers *a s'il existe une fonction ϵ, telle que $\lim_{x\to a}\epsilon(x) = 0$ et que $f(x) = g(x)\epsilon(x)$ au voisinage de a. Si g ne s'annule pas au voisinage de a, sauf peut-être en a, ceci revient à dire que $\lim_{x\to a}(f(x)/g(x)) = 0$. On note $f(x) = o(g(x))$ quand $x \to a$ (on lit "f(x) est un petit o de g(x)").*

La notation $f(x) = o(g(x))$ est un abus de notation (si on a aussi $h(x) = o(g(x))$, ce n'est pas pour cela que $f(x) = h(x)$). Mais elle est employée couramment. Comme cette notation risque d'induire en erreur, on a intérêt en cas de doute à revenir à l'écriture $f(x) = g(x)\epsilon(x)$ avec $\lim_{x\to a} \epsilon(x) = 0$.

Donnons quelques exemples. Quand $x \to 0$ on a $x^m = o(x^n)$ si et seulement si $m > n$. Quand $x \to +\infty$ on a $x^m = o(x^n)$ si et seulement si $m < n$. Quand $x \to +\infty$ on a $\ln(x) = o(x^\alpha)$ pour tout $\alpha > 0$.

Exercice. Montrer que $f(x) \sim_{x\to a} g(x)$ si et seulement si $f(x) - g(x) = o(g(x)$ quand $x \to a$.

Définition 4.4 *On dit que* $f(x)$ est dominé par $g(x)$ quand x tend vers a *quand il existe une constante réelle* $K > 0$ *telle que* $|f(x)| \leq K\,|g(x)|$ *au voisinage de* a*. On écrit* $f(x) = O(g(x))$ *quand* $x \to a$ *(on lit "f(x) est un grand O de g(x)").*

La notation $f(x) = O(g(x))$ est encore un abus.

Quelques exemples : $x\sin(x) = O(x)$ quand $x \to +\infty$; pour tout $\alpha > 0$, $(1+x)^\alpha = O(x)$ quand $x \to 0$.

Exercice. Démontrer les propriétés suivantes (tout a lieu quand $x \to a$).

1. Si $f(x) = o(g(x))$, alors $f(x) = O(g(x))$.
2. Si $f(x) \sim g(x)$, alors $f(x) = O(g(x))$.
3. Si $f(x) = O(g(x))$ et $g(x) \sim h(x)$, alors $f(x) = O(h(x))$
4. Si $f(x) = o(g(x))$ et $g(x) = O(h(x))$, alors $f(x) = o(h(x))$.
5. Si $f_1(x) = o(g(x))$ et $f_2(x) = o(g(x))$, alors $(f_1 + f_2)(x) = o(g(x))$.
6. Si $f_1(x) = o(g_1(x))$ et $f_2(x) = O(g_2(x))$, alors $(f_1f_2)(x) = o(g_1g_2)(x)$.

Une erreur à ne pas faire : si $f(x) = o(g_1(x))$ et $f(x) = o(g_2(x))$ quand $x \to a$, on ne peut pas en déduire que $f(x) = o((g_1 + g_2)(x))$ quand $x \to a$. Par exemple, prendre $f(x) = x^3$, $g_1(x) = x^2 + x^3$, $g_2(x) = -x^2$ quand $x \to 0$.

Les notations o et O sont appelées notations de Landau (Edmund Landau (1877–1938), mathématicien allemand)

4.1.3 Comparaison des suites

Les outils de comparaison introduits pour les fonctions s'utilisent aussi pour les suites.

Définition 4.5 *Soient* (u_n) *et* (v_n) *deux suites de nombres réels. On suppose que* $v_n \neq 0$ *à partir d'un certain rang.*

1) On dit que la suite (u_n) *est* équivalente à la suite (v_n) *si* $\lim u_n/v_n = 1$*. On note* $u_n \sim v_n$.

2) On dit que la suite (u_n) *est* négligeable devant la suite (v_n) *si* $\lim u_n/v_n = 0$*. On note* $u_n = o(v_n)$*.*

1) On dit que la suite (u_n) *est* dominée par la suite (v_n) *s'il existe un réel* $K > 0$ *tel que* $|u_n| \leq K|v_n|$ *à partir d'un certain rang. On note* $u_n = O(v_n)$*.*

Les comparaisons de suites viennent souvent de comparaisons de fonctions quand $x \to +\infty$. Par exemple si (u_n) et (v_n) sont définies respectivement par $u_n = f(n)$ et $v_n = g(n)$, et $f(x) \sim_{x\to+\infty} g(x)$, alors $u_n \sim v_n$.

Exercice. Comparer les suites $(n \ln n)$ et (n^2)

La notation O est fréquemment utilisée pour évaluer la complexité d'un algorithme.

Considérons par exemple le problème du tri : ranger par ordre croissant une liste de n nombres. Combien faut-il faire de comparaisons entre nombres ? Ceci dépend de l'algorithme de tri utilisé.

L'algorithme récursif : si on a trié i nombres, on compare le $i+1$-ème à ceux déjà triés pour le ranger à la bonne place. On peut avoir à faire (dans le plus mauvais cas) $1+2+3+\cdots+(n-1) = (n-1)n/2$ comparaisons, ce qui fait $O(n^2)$ comparaisons.

L'algorithme de "tri-fusion" : on fusionne deux listes déjà triées en comparant les premiers éléments des deux listes, prenant le plus petit et recommençant ; on fait ainsi des listes triées de 2, puis de 4, puis de 8.... Le nombre de comparaisons à faire pour fusionner deux listes triées de 2^{i-1} nombres est au plus $2^i - 1$. Si $2^{k-1} < n \leq 2^k$, il y a 2^{k-i} listes de 2^i nombres ou moins. Le nombre de comparaisons à faire pour trier n nombres par l'algorithme de tri-fusion est donc majoré par

$$1 \cdot 2^{k-1} + 3 \cdot 2^{k-2} + \cdots + (2^i - 1)2^{k-i} + \cdots + (2^k - 1) \cdots 1 \leq k\, 2^k \leq (1 + \log_2 n)\, 2n \; .$$

Ceci fait $O(n \ln n)$ comparaisons (vérifier), et c'est négligeable devant n^2.

4.2 Développements limités

4.2.1 Formule de Taylor avec reste de Young

Théorème 4.6 *Soit a un nombre réel. Soit f une fonction réelle définie et $n-1$ fois dérivable sur un intervalle ouvert I contenant a. On suppose que f a une dérivée n-ème $f^{(n)}(a)$ en a. Alors, pour $a+h \in I$, on a*

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\, h + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\, h^n + h^n \epsilon(h) \; ,$$

où $\lim_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$.

Le "reste" $h^n \epsilon(h)$ s'appelle reste de Young, et la formule du théorème est la *formule de Taylor avec reste de Young à l'ordre n en a.* Avec la notation du petit o, le reste peut aussi s'écrire $o(h^n)$ pour $h \to 0$. A l'ordre 1, la formule s'écrit

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\epsilon(h) \quad \text{avec} \; \lim_{h \to 0} \epsilon(h) = 0.$$

C'est simplement écrire que f a pour dérivée $f'(a)$ en a. La différence entre les restes (Lagrange ou Young) se traduit par une différence d'utilisation des formules. La formule de Taylor avec reste de Lagrange permet des calculs de majorations sur un intervalle, comme la formule des accroissements finis qu'elle généralise. La formule de Taylor avec reste de Young en a donne des renseignements sur le comportement de la fonction quand la variable tend vers a, comme la formule pour la dérivée en a qu'elle généralise.

Démonstration: Posons, pour $x \in I$,

$$g(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}\,.$$

On vérifie que $g(a) = f(a)$ et que $g^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ pour $1 \leq k \leq n-1$. Posons, pour $t \in I$ (en supposant $h \neq 0$),

$$\Phi(t) = f(t) - g(t) - \frac{f(a+h) - g(a+h)}{h^n}(t-a)^n.$$

La fonction Φ est $n-1$ fois dérivable sur I. On constate que $\Phi(a) = \Phi'(a) = \ldots = \Phi^{(n-1)}(a) = 0$. On constate aussi que $\Phi(a+h) = 0$. Donc d'après le théorème de Rolle, il existe c_1 entre a et $a+h$ tel que $\Phi'(c_1) = 0$. De nouveau d'après le théorème de Rolle, il existe c_2 entre a et c_1 tel que $\Phi''(c_2) = 0$. En continuant ainsi, on trouve c_{n-1}, entre a et $a+h$, tel que $\Phi^{(n-1)}(c_{n-1}) = 0$. Comme

$$\Phi^{(n-1)}(t) = f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(a) - \frac{f(a+h) - g(a+h)}{h^n}\, n!(t-a),$$

on obtient

$$f(a+h) = g(a+h) + \frac{f^{(n-1)}(c_{n-1}) - f^{(n-1)}(a)}{n!(c_{n-1}-a)}\, h^n.$$

Quand h tend vers 0, c_{n-1} qui est coincé entre a et $a+h$ tend vers a. Comme $f^{(n-1)}$ est dérivable en a, on a

$$\frac{f^{(n-1)}(c_{n-1}) - f^{(n-1)}(a)}{n!(c_{n-1}-a)} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \epsilon(h),$$

où $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$. En reportant dans l'expression de $f(a+h)$, et en explicitant $g(a+h)$, on obtient bien

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + h^n\epsilon(h).$$

□

Les hypothèses que l'on a donné visent à avoir un énoncé le plus général possible. Dans la pratique, on a souvent à écrire une formule de Taylor-Young en a pour une fonction f qui est $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle ouvert contenant a. Dans ce cas, les hypothèses du théorème 4.6 sont bien sûr vérifiées.

On peut donner une démonstration plus rapide de la formule de Taylor-Young dans le cas où f est $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle ouvert contenant a, en utilisant la formule de Taylor-Lagrange (par contre on ne pourrait pas montrer Taylor-Lagrange à partir de Taylor-Young, ceci indique qu'il y a plus d'information dans le reste de Lagrange que dans le reste de Young). C'est le contenu de l'exercice suivant.

Exercice. On suppose que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle ouvert I contenant a. Soit h tel que $a+h \in I$. Ecrire la formule de Taylor avec reste de Lagrange pour f à l'ordre n entre a et $a+h$. Vérifier que le reste est négligeable devant h^n quand $h \to 0$. En déduire la formule de Taylor-Young.

Exemples. En $a = 0$, la formule de Taylor avec reste de Young s'écrit

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\epsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0.$$

Pour $f(x) = e^x$ (qui est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$), on a $f^{(k)}(0) = 1$ pour tout k, et la formule de Taylor avec reste de Young à l'ordre n en 0 s'écrit :

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)\ .}$$

Pour $f(x) = \sin x$, les valeurs en 0 de la fonction et de ses dérivées successives sont $0, 1, 0, -1$ et puis on recommence. La formule de Taylor avec reste de Young à l'ordre $2n$ en 0 s'écrit

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}).$$

Pour $f(x) = \cos x$, les valeurs en 0 de la fonction et de ses dérivées successives sont $1, 0, -1, 0$ et puis on recommence. La formule de Taylor avec reste de Young à l'ordre $2n+1$ en 0 s'écrit

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})\ .}$$

Soit α un nombre réel. Alors $f(x) = (1+x)^\alpha$ définit une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$, et $f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)$. La formule de Taylor avec reste de Young à l'ordre n en 0 s'écrit

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)\ .}$$

Par exemple

4.2.2 Développements limités

Définition 4.7 *Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle ouvert I contenant a. On dit que f* admet un développement limité à l'ordre n en a *s'il existe des réels $a_0, \ldots, a_n$ tels que*

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + h^n\epsilon(h) \quad \textit{avec } \lim_{h\to 0}\epsilon(h) = 0.$$

Le polynôme $a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n$ s'appelle la partie régulière *du développement limité.*

Un développement limité de f à l'ordre n nous donne un polynôme de degré inférieur ou égal à n qui “se comporte comme f à l'ordre n” au voisinage de a, dans le sens que la différence entre $f(a+h)$ et ce polynôme en h est négligeable devant h^n quand $h \to 0$.

Si la fonction f est $n-1$ fois dérivable sur un intervalle contenant a et a une dérivée n-ème en a, la formule de Taylor-Young nous donne un développement limité à l'ordre n, avec $a_0 = f(a)$ et $a_k = f^{(k)}(a)/k!$ pour $1 \leq k \leq n$.

Réciproquement, on peut se demander si un développement limité est toujours donné par une formule de Taylor-Young, c.-à-d. si une fonction qui a un développement limité à l'ordre n en a a une dérivée n-ème en a. C'est vrai à l'ordre 1, et dans un développement limité

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + o(h^n)$$

on a toujours $a_0 = f(a)$ et $a_1 = f'(a)$. Mais ceci ne va plus à l'ordre 2. Considérons par exemple la fonction

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 \sin(1/x).$$

Elle a un développement limité à l'ordre 2 en 0 : $f(x) = 1 + x + x^2 + o(x^2)$. Sa dérivée est

$$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 \sin(1/x) - x\cos(1/x) = 1 + x(2 - \cos(1/x)) + 3x^2 \sin(1/x),$$

et f n'a pas de dérivée seconde en 0 car

$$\frac{f'(x) - 1}{x} = 2 - \cos(1/x) + 3x\sin(1/x)$$

n'a pas de limite quand x tend vers 0.

Introduisons une notation qui sera utile pour la suite. Si P est un polynôme, on désignera par $T_k(P)$ (le tronqué de P au degré k) le polynôme obtenu à partir de P en ne conservant que les monômes de degrés inférieurs ou égaux à k. Par exemple $T_4(x - x^3/3 + 2x^5) = x - x^3/3$.

Proposition 4.8 *1) Un développement limité, lorsqu'il existe, est unique.*

2) Si f a un développement limité à l'ordre n en a, de partie régulière P, et si $k \leq n$, alors f a aussi un développement limité à l'ordre k, dont la partie régulière est le tronqué $T_k(P)$.

Démonstration: 1) Si on a

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + h^n \epsilon(h) = b_0 + b_1 h + \cdots + b_n h^n + h^n \varphi(h),$$

avec $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = \lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0$, alors, pour tout k de $\{0, 1, \cdots, n\}$

$$\frac{(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)h + \cdots + (a_n - b_n)h^n}{h^k} = h^{n-k}(\varphi(h) - \varepsilon(h))$$

ce qui, en donnant successivement à k les valeurs $0, 1, \cdots, n$ et en faisant tendre h vers 0, entraîne $a_0 = b_0, \ldots, a_n = b_n$ et donc aussi $\epsilon(h) = \varphi(h)$.

2) Si $f(a+h) = a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + o(h^n)$, alors

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + \cdots + a_k h^k + [a_{k+1} h^{k+1} + \cdots + a_n h^n + o(h^n))],$$

et le terme entre crochet est bien $o(h^k)$ quand h tend vers 0. $\square$

Voici maintenant une remarque dont il est utile de se souvenir pendant les calculs

Proposition 4.9 *La partie régulière du développement limité en 0 d'une fonction paire (resp. impaire) est un polynôme pair (resp. impair), c.-à-d. qu'il ne contient que des puissances paires (resp. impaires) de la variable.*

Démonstration: Si f est paire et si, en 0

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{2n+1} x^{2n+1} + o(x^{2n+1}),$$

alors en changeant x en $-x$ on obtient

$$f(x) = f(-x) = a_0 - a_1 x + \cdots - a_{2n+1} x^{2n+1} + o(x^{2n+1}),$$

d'où par unicité du dévelopement limité,

$$f(x) = a_0 + a_2 x^2 + \cdots + a_{2n} x^{2n} + o(x^{2n+1}).$$

$\square$

Par exemple, la partie régulière du développement limité de $\sin x$ en 0 ne contient que des puissances impaires.

4.2.3 Opérations sur les développements limités

Dans tout ce paragraphe, nous ne considérerons que des développements limités en 0.

Proposition 4.10 (Somme et produit) *Si f et g ont des développements limités à l'ordre n en 0*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n) \qquad g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n),$$

alors $f+g$ et fg aussi

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + \cdots + (a_n+b_n)x^n + o(x^n) \\ (fg)(x) &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + \cdots + (\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i})x^n + o(x^n) \end{aligned}$$

Autrement dit, la partie régulière du développement limité de la somme est la somme des parties régulières de chacun des développements limités, et celle du produit est le tronqué au degré n du produit des parties régulières (tous les développements limités étant au même ordre n). Nous nous contenterons d'un exemple

$$\begin{aligned}\cos^2 x &= (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5))^2 = 1 - x^2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{24}\right) x^4 + o(x^5) \\ &= 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^5)\end{aligned}$$

Quand on fait le produit des parties régulières (ou qu'on élève au carré, comme ici), il n'est bien entendu pas besoin de calculer les termes dont le degré dépasse l'ordre du développement limité. Il est bon aussi de se souvenir d'éventuelles propriétés de parité (par exemple dans le cas d'un carré). Ici, on aurait aussi pu utiliser $\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2$.

Il se peut que l'on gagne des ordres dans le développement limité du produit. Par exemple, pour avoir le développement limité de $\sin^3 x$ à l'ordre 6, on peut faire

$$\begin{aligned}\sin^3 x &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^3 = x^3 \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)^3 \\ &= x^3(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)) = x^3 - \frac{x^5}{2} + o(x^6)\end{aligned}$$

Il est quelquefois utile, comme ici, de mettre des puissances de x en facteur, en se souvenant que $o(x^{d+e}) = x^d o(x^e)$ (toujours quand $x \to 0$, bien sûr).

Comme conséquence de ce que l'on a vu pour les sommes, citons le fait que la partie régulière du développement limité de la partie paire d'une fonction f (définie comme $(f(x) + f(-x))/2$) est la partie paire de la partie régulière du développement limité de $f(x)$. Idem pour la partie impaire. En partant de e^x, ceci nous donne

$$\boxed{\begin{aligned}\operatorname{ch} x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\ \operatorname{sh} x &= x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n})\end{aligned}}$$

Pour les quotients, on peut utiliser la division des polynômes suivant les puissances croissantes. On rappelle que si A et B sont deux polynômes en x, avec $B(0) \neq 0$, alors pour tout entier n il existe un unique couple de polynômes Q, R avec $\deg Q \leq n$ ou $Q = 0$, tel que $A = BQ + x^{n+1}R$. On appelle Q le quotient dans la division suivant les puissances croissantes à l'ordre n de A par B.

Proposition 4.11 (Quotient) *Si f et g (avec $g(0) \neq 0$) ont des développements limités à l'ordre n en 0*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n) \qquad g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n) \quad b_0 \neq 0,$$

alors f/g a aussi un développement limité à l'ordre n, dont la partie régulière est le quotient dans la division suivant les puissances croissantes à l'ordre n de la partie régulière du développement limité de f par celle de g.

Démonstration: On pose $A(x) = a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ et $B(x) = b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n$. On a $A = BQ + x^{n+1}R$ avec $\deg Q \leq n$ ou $Q = 0$. Donc

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{A(x)+o(x^n)}{B(x)+o(x^n)} = \frac{B(x)Q(x)+o(x^n)}{B(x)+o(x^n)} \\ &= Q(x) + \frac{o(x^n)}{B(x)+o(x^n)} = Q(x) + o(x^n), \end{aligned}$$

où la dernière égalité utilise que $B(0) \neq 0$. □

Un exemple : le calcul du développement limité à l'origine de $\tan x$ à l'ordre 6. On se souvient que tan est impaire (il y aura des termes en x, x^3 et x^5 uniquement. Quand on effectue la division suivant les puissances croissantes, on n'a pas à s'embarrasser des termes de degré dépassant celui qu'on cherche, ici 5 (le reste ne nous intéresse pas).

$$\begin{array}{ccccc|ccccc} x & - & x^3/6 & + & x^5/120 & 1 & - & x^2/2 & + & x^4/24 \\ \cline{6-10} x & - & x^3/2 & + & x^5/24 & x & + & x^3/3 & + & 2x^5/15 \\ \cline{1-5} & & x^3/3 & - & x^5/30 & & & & & \\ & & x^3/3 & - & x^5/6 & & & & & \\ \cline{3-5} & & & & 2x^5/15 & & & & & \end{array}$$

De cette division on tire la formule (qu'il n'est pas mauvais de connaître par coeur)

$$\boxed{\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)}$$

Proposition 4.12 (Substitution) *Si f et g (avec $g(0) = 0$) ont des développements limités à l'ordre n en 0*

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + o(x^n) \qquad g(x) = b_1x + \cdots + b_nx^n + o(x^n),$$

alors $f(g(x))$ a un développement limité à l'ordre n en 0, dont la partie régulière s'obtient en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à n dans

$$a_0 + a_1(b_1x + \cdots + b_nx^n) + \cdots + a_n(b_1x + \cdots + b_nx^n)^n.$$

Autrement dit, si $A(x)$ est la partie régulière du développement limité de $f(x)$ et $B(x)$ ($B(0) = 0$) celle de $g(x)$, alors la partie régulière du développement limité de $f(g(x))$ est le tronqué $T_n(A(B(x)))$.

Démonstration: Du développement limité de g (avec le fait que $g(0) = 0$) on tire $g(x) = O(x)$ d'où $g(x)^n = O(x^n)$ et donc $o(g(x)^n) = o(x^n)$. Par ailleurs, pour tout $k \leq n$ on a $g(x)^k = (B(x) + o(x^n))^k = B(x)^k + o(x^n)$. Donc

$$f(g(x)) = A(B(x) + o(x^n)) + o(g(x)^n) = A(B(x)) + o(x^n) = T_n(A(B(x))) + o(x^n).$$

□

Il faut bien prendre garde à la condition $g(0) = 0$ quand on substitue. La démonstration montre qu'elle est nécessaire pour garder un contrôle sur le reste après substitution. Par exemple, pour calculer le développement limité de $e^{\cos x}$ en 0 à l'ordre 3, si on écrit

$$e^{\cos x} = 1 + (1 - x^2/2) + \frac{(1 - x^2/2)^2}{2!} + \frac{(1 - x^2/2)^3}{3!} + o(x^3) = \frac{8}{3} - \frac{5}{4}x^2 + o(x^3),$$

ON A TOUT FAUX! En effet, $\cos 0 = 1 \neq 0$. Le calcul correct est

$$e^{\cos x} = e\left(e^{\cos x - 1}\right) = e(1 + (-x^2/2) + o(x^3)) = e - \frac{e}{2}x^2 + o(x^3).$$

On constate ici que l'on gagne même en précision : on a déjà le développement limité à l'ordre 3 en substituant $\cos x - 1$ dans le développement limité à l'ordre 1 de e^x. Ceci vient du fait que $\cos x - 1 = O(x^2)$ quand $x \to 0$. Dans le même ordre d'idée, la partie régulière du développement limité de $f(x^2)$ à l'ordre $2n+1$ en 0 s'obtient en substituant x^2 à x dans la partie régulière du développement limité de $f(x)$ à l'ordre n.

Proposition 4.13 (Intégration) *Si f a un développement limité à l'ordre n en 0*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$$

et si F est une primitive de f définie sur un intervalle ouvert contenant 0 ($F' = f$), alors $F(x)$ a un développement limité à l'ordre $n+1$ en 0, qui est

$$F(x) = F(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1}).$$

Autrement dit, la partie régulière du développement limité à l'ordre $n+1$ d'une primitive est une primitive de la partie régulière du développement limité à l'ordre n.

Démonstration: Posons

$$B(x) = F(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}, \qquad G(x) = F(x) - B(x).$$

G est dérivable sur un intervalle ouvert contenant 0,

$$G'(x) = f(x) - (a_0 + \cdots + a_n x^n) = o(x^n) = x^n \epsilon(x)$$

avec $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$, et $G(0) = 0$. Donc, d'après le théorème des accroissement finis, $G(x) = xG'(\theta x)$ avec θ dépendant de x, $0 < \theta < 1$. Ainsi

$$G(x) = x(\theta x)^n \epsilon(\theta x) = x^{n+1}\theta^n \epsilon(\theta x) = o(x^{n+1}),$$

car $\lim_{x\to 0} \theta^n \epsilon(\theta x) = 0$. Au total,

$$F(x) = F(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1}).$$

$\square$

Ainsi, de

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$$

on obtient le développement limité en 0

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)\ ,}$$

et par intégration

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})\ .}$$

De

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^5)$$

on tire

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^6).$$

Exercice. Calculer le développement limité à l'ordre $2n$ de arctan en 0.

Corollaire 4.14 (Dérivation) *Si f a un développement limité à l'ordre n en* 0

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n),$$

si f est dérivable sur un intervalle ouvert contenant 0 *et si sa dérivée f' a un développement limité à l'ordre $n-1$ en* 0*, celui-ci est*

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + o(x^{n-1}).$$

Démonstration: On écrit le développement limité

$$f'(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{n-1} x^{n-1} + o(x^{n-1}),$$

on utilise la proposition précédente qui nous donne

$$f(x) = f(0) + b_0 x + \frac{b_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{b_{n-1}}{n}x^n + o(x^n),$$

et on identifie avec

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n).$$

$\square$

On est obligé dans l'énoncé de mettre comme hypothèse l'existence du développement limité de f' à l'ordre $n-1$. Ceci ne vient pas automatiquement, comme le montre l'exemple donné plus haut d'une fonction qui a un développement limité à l'ordre 2 en 0, mais qui n'est pas deux fois dérivable. Sa dérivée n'a pas de dérivée en 0, ce qui veut dire qu'elle n'a pas de développement limité d'ordre 1.

4.2.4 Utilisation des développements limités

Les développements limités servent à calculer des limites, ils servent aussi à l'étude des courbes. Pour les calculs, on se ramène toujours à écrire des développements limités en 0.

Quand on est au voisinage de a, on fait le changement de variables $x = a + h$ et on écrit des développements limités en 0 pour la variable h. Par exemple, pour obtenir le développement limité de $\tan x$ en $\pi/4$ à l'ordre 2, on écrit

$$\begin{aligned}\tan(\frac{\pi}{4}+h) &= \frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan h}{1-\tan\frac{\pi}{4}\,\tan h} = \frac{1+\tan h}{1-\tan h} = \frac{1+h+o(h^2)}{1-h+o(h^2)}\\ &= (1+h+o(h^2))(1+h+h^2+o(h^2)) = 1+2h+2h^2+o(h^2),\end{aligned}$$

où le o est pour $h \to 0$. On peut aussi écrire

$$\tan x = 1 + 2(x-\frac{\pi}{4}) + 2(x-\frac{\pi}{4})^2 + o\left((x-\frac{\pi}{4})^2\right),$$

où cette fois-ci le o est pour $x \to \pi/4$.

Au voisinage de l'infini, on utilise le changement de variable $x = 1/t$, et on écrit des développements limités en 0 pour la variable t. Soit par exemple à étudier la branche infinie pour $x \to -\infty$ de la courbe d'équation

$$y = \sqrt[3]{x^3+x+1} - \sqrt{x^2-x-1}.$$

Pour $x < -1$, on a (attention aux signes !)

$$y = x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}} + x\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}.$$

On fait $t = 1/x$, et on écrit le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $f(t) = \sqrt[3]{1+t^2+t^3} + \sqrt{1-t-t^2}$. On a

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1+t^2+t^3} &= 1+\frac{1}{3}(t^2+t^3)+o(t^2) = 1+\frac{t^2}{3}+o(t^2)\\ \sqrt{1-t-t^2} &= 1+\frac{1}{2}(-t-t^2)-\frac{1}{8}(-t-t^2)^2+o(t^2) = 1-\frac{t}{2}-\frac{5t^2}{8}+o(t^2)\\ f(t) &= 2-\frac{t}{2}-\frac{7t^2}{24}+o(t^2)\end{aligned}$$

et donc, en $-\infty$,

$$y = x\left(2-\frac{1}{2x}-\frac{7}{24x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = 2x-\frac{1}{2}-\frac{7}{24x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

La droite $y = 2x - 1/2$ est asymptote, et la courbe est au dessus de l'asymptote car $-7/(24x) + o(1/x) > 0$ quand x est “proche de $-\infty$”.

Les règles de calcul sur les développements limités sont mécaniques, et on peut les programmer : les systèmes de calcul formel permettent de calculer des développements limités sans effort! Par exemple, demandons au logiciel MAPLE pour le développement limité de $\tan x$ en $\pi/4$

```
> taylor(tan(x),x=Pi/4,5);

                                         2                    3                      4
 1 + 2 (x - 1/4 Pi) + 2 (x - 1/4 Pi)  + 8/3 (x - 1/4 Pi)  + 10/3 (x - 1/4 Pi)

                      5
      + O((x - 1/4 Pi) )
```

Remarquer que ce qui est obtenu ici est un développement limité à l'ordre 4, et que le reste est présenté sous forme d'un O et pas d'un o : quand $x \to \frac{\pi}{4}$, un $O((x - \frac{\pi}{4})^5)$ est un $o((x - \frac{\pi}{4})^4)$, mais la réciproque n'est pas vraie.

Quand on fait les calculs à la main, il y a des pièges classiques dans lesquels il vaut mieux ne pas tomber. On a signalé plus haut une erreur à éviter dans le cas de substitutions. Un point important à garder à l'esprit est : *à quel ordre sont les développements limités* ? Il faut *toujours écrire les restes*, pour garder l'ordre en mémoire. Par exemple une écriture du genre

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$$

EST ABSOLUMENT A PROSCRIRE. Elle conduit inévitablement à des calculs comme

$$\sin^2 x \approx x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{36}$$

qui font croire que l'on a comme ceci le développement limité de $\sin^2 x$ à l'ordre 6 (que vaut-il, pour de vrai?).

Table des matières