20/12/2019

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

MASTER 1
Métiers de l'Education, de l'Enseignement et de la Formation

Parcours : MATHÉMATIQUES

Module AG1 : Contrôle long

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique - à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

Ce sujet est composé de deux exercices et d'un problème totalement indépendants.
La clarté et la précision des raisonnements, la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1 : isométries de l'espace

On considère $\mathscr{E} = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure canonique d'espace affine euclidien.
On rappelle que :

- Étant donnés deux points distincts A et B de $\mathscr{E}$, l'ensemble des points M situés à égale distance de A et B est un plan appelé ***plan médiateur*** du segment $[AB]$.
- Une isométrie de $\mathscr{E}$ est une application $f : \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}$ vérifiant : $\forall (A, B) \in \mathscr{E}^2 \qquad f(A)f(B) = AB$
- On appelle ***réflexion*** de $\mathscr{E}$ toute symétrie orthogonale par rapport à un plan de $\mathscr{E}$. La symétrie orthogonale par rapport au plan $\mathscr{P}$ est notée $s_{\mathscr{P}}$.

1) Soit f une isométrie de $\mathscr{E}$ fixant quatre points non coplanaires A_1, A_2, A_3, A_4. Montrer que f est l'identité. *On pourra raisonner par l'absurde et introduire un certain plan médiateur.*

2) Soit f une isométrie de $\mathscr{E}$, distincte de l'identité, fixant trois points non alignés A_1, A_2, A_3. Montrer que f est une réflexion. *On pourra considérer $s_{\mathscr{P}} \circ f$ pour un plan $\mathscr{P}$ bien choisi.*

3) Soit f une isométrie de $\mathscr{E}$, distincte de l'identité, fixant deux points distincts A_1 et A_2. Montrer que f est la composée d'au plus deux réflexions.

4) Montrer que toute isométrie de $\mathscr{E}$ est la composée d'au plus quatre réflexions.

Exercice 2 : matrices nilpotentes

Soit d un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par $\mathscr{M}(d, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées à coefficients réels, à d lignes et d colonnes. Si A est un élément de $\mathscr{M}(d, \mathbb{R})$ et i, j deux entiers de $\{1, ..., d\}$, on note $A(i, j)$ le coefficient de la matrice A situé à la i-ème ligne et à la j-ième colonne.
On note I_d la matrice identité de $\mathscr{M}(d, \mathbb{R})$.
On pose : $A^0 = I_d$, $A^1 = A$ et pour tout entier $k \geqslant 2$, $A^k = AA^{k-1}$.
Une matrice A de $\mathscr{M}(d, \mathbb{R})$ est dite ***nilpotente*** s'il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que $A^k = 0$; le plus petit entier $r \geqslant 1$ vérifiant $A^r = 0$ est alors appelé l'***ordre de nilpotence*** de A.

On suppose désormais que A une matrice non nulle de $\mathscr{M}(d, \mathbb{R})$ ($d \geqslant 2$) nilpotente d'ordre r.

1) Montrer que zéro est la seule valeur propre complexe de la matrice A. Quel est le polynôme caractéristique de A ?
Question bonus : Quel théorème permet d'en déduire que $r \leqslant d$?

2) On désigne par $e(A)$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}(d, \mathbb{R})$ engendré par les matrices A^k, $k \geqslant 0$. Montrer que $\mathscr{B} = \{I_d,\ A, \cdots, A^{r-1}\}$ est une base de $e(A)$.

3) Soit s un élément de $\mathbb{N}$. Montrer que la matrice $(I_d - A)^{s+1}$ appartient à $e(A)$. Donner ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$.

4) On appelle J_d la matrice carrée d'ordre d définie par :

$$\forall (i, j) \in \{1, ..., d\}^2,\ J_d(i, j) = \begin{cases} 1 \text{ si } j - i = 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Pour $k \geqslant 2$, calculer la puissance k-ième de la matrice J_d. En déduire que J_d est une matrice nilpotente et préciser son ordre de nilpotence.

Problème : passage aux milieux

Notations du problème

• On désigne par $\mathscr{C}_n$ l'ensemble des configurations $P = (A_1,\ A_2, \dots,\ A_n)$ constituées de n points, distincts ou non, du plan orienté. Dans tout le problème, n est un entier supérieur ou égal à 3.

Lorsque les points $A_1,\ A_2, \dots,\ A_n$ ne sont pas alignés, on dit que $P = (A_1,\ A_2, \dots,\ A_n)$ est un ***polygone***, dans le cas contraire, on dit que la configuration P est *aplatie*.

• On dit qu'un ***polygone*** $P = (A_1,\ A_2, \dots,\ A_n)$ est ***régulier***, s'il existe une rotation r du plan telle que $r(A_j) = A_{j+1}$ si $1 \leqslant j \leqslant n-1$ et $r(A_n) = A_1$. On sait alors qu'une telle rotation est unique, qu'une mesure de son angle est de la forme $\frac{2k\pi}{n}$ où $1 \leqslant k \leqslant n-1$; son centre est appelé ***centre*** de P.

• Le choix d'une origine O et d'une base orthonormée directe permet d'identifier le plan à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes en associant à tout point A de coordonnées (x, y) son affixe $z = x+iy$. À toute configuration $P = (A_1,\ A_2, \dots,\ A_n)$ est ainsi associée bijectivement un élément $u = (z_1,\ z_2, \dots,\ z_n)$ de $\mathbb{C}^n$ qu'on appellera encore ***affixe*** de P ; inversement, on dira que P est l'image de u.

• On désigne par $\boldsymbol{d}$ l'opérateur de ***décalage*** qui à toute configuration $P = (A_1,\ A_2, \dots,\ A_n)$ associe $d(P) = (A_2,\ A_3, \dots,\ A_n, A_1)$ et par $\boldsymbol{m}$ l'opérateur de ***passage aux milieux*** qui à toute configuration $P = (A_1,\ A_2, \dots,\ A_n)$ associe $(B_1,\ B_2, \dots,\ B_n)$, où, pour tout élément $k \in [\![1, n-1]\!]$, B_k est le milieu du segment $[A_k,\ A_{k+1}]$, et où B_n est le milieu du segment $[A_n,\ A_1]$.

• Dans toute la suite on note D et M les endomorphismes du $\mathbb{C}-$espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ définis par les relations :

$$D\left((z_1,\ z_2, \dots,\ z_n)\right) = (z_2,\ z_3, \dots,\ z_n,\ z_1)\ ; \qquad M = \frac{1}{2}(I + D),$$

où I désigne l'application identique de $\mathbb{C}^n$.

Dans ces conditions, pour toute configuration P d'affixe u, les configurations $d(P)$ et $m(P)$ admettent pour affixes respectives $D(u)$ et $M(u)$.

Partie I
Effet de la barycentration et compatibilité avec les similitudes du plan.

Pour toute transformation affine (bijective) t du plan, et pour toute configuration $P = (A_1,\ A_2, \dots,\ A_n)$ on note $t.P$ la configuration $(A'_1,\ A'_2, \dots,\ A'_n)$ où $A'_j = t(A_j)$.

1. **Isobarycentre de $m(P)$; compatibilité avec les translations.**
   Soit $P = (A_1,\ A_2, \dots,\ A_n)$ une configuration et G l'isobarycentre de P, défini par la relation :
   $$\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \cdots + \overrightarrow{GA_n} = \overrightarrow{0}.$$
   (a) Montrer que G est aussi l'isobarycentre de $m(P)$.
   (b) Soit t une translation du plan. Comparer $m(t.P)$ et $t.m(P)$. Déterminer l'isobarycentre de $m(t.P)$.
2. **Cas particulier des triangles.**
   (a) Soient $P = (A_1, A_2, A_3)$ un triangle et G son isobarycentre.
   Construire le triangle $m(P) = (B_1, B_2, B_3)$. Prouver que $d[m(P)]$ se déduit de P par une homothétie h de centre G dont on indiquera le rapport λ.
   (b) En déduire que m induit une bijection sur l'ensemble des triangles.
   Étant donné un triangle $Q = (B_1, B_2, B_3)$, indiquer une construction géométrique de l'unique triangle $P = (A_1, A_2, A_3)$ tel que $m(P) = Q$.

3. **Interprétation dans $\mathbb{C}^n$.**
On note e_0 l'élément de $\mathbb{C}^n$ donné par $e_0 = (1,\ 1, \ldots,\ 1)$ et H l'hyperplan de $\mathbb{C}^n$ d'équation :
$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n = 0.$$
   (a) Montrer que $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}e_0 \oplus H$.
   (b) Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathbb{C}e_0$ et H sont stables par l'endomorphisme M.
   (c) Soit P une configuration d'affixe $u = (z_1,\ z_2, \ldots,\ z_n)$. Déterminer l'affixe λ de l'isobarycentre G de P. Caractériser géométriquement les configurations P telles que $u \in H$ et celles qui vérifient la relation $u = \alpha e_0$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$.

4. **Compatibilité avec les similitudes.**
Soit $P = (A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n)$ une configuration d'affixe $u = (z_1,\ z_2, \cdots,\ z_n)$. On note $\overline{P}$ la configuration d'affixe $\overline{u} = (\overline{z_1},\ \overline{z_2}, \cdots,\ \overline{z_n})$ et, pour tout nombre complexe a, on note $a.P$ la configuration d'affixe $a.u = (az_1,\ az_2, \cdots,\ az_n)$.
   (a) Par quelles transformations géométriques simples du plan, $\overline{P}$ et $a.P$ se déduisent-elles de P ?
   (b) Comparer $m(\overline{P})$ et $\overline{m(P)}$, ainsi que $m(a.P)$ et $a.m(P)$.

Partie II
Polygone des milieux d'un polygone régulier et similitudes directes.

Dans toute la suite du problème, on note ω la racine n-ième de l'unité définie par la relation $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$, on note R_k la configuration ayant pour affixe :
$$e_k = (1,\ \omega^k,\ \omega^{2k}, \ldots,\ \omega^{(n-1)k}).$$

1. **Interprétation dans $\mathbb{C}^n$ des polygones réguliers.**
   (a) Prouver que si $k \neq 0$ et $2k \neq n$, R_k est un polygone et que ce polygone est régulier de centre O. Déterminer l'isobarycentre de R_k. Quelle est la nature de R_0 et de R_k lorsque $2k = n$?
   (b) Inversement, montrer que pour tout polygone régulier $P = (A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n)$ de centre O, il existe un entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$ et $2k \neq n$, et une similitude directe s, de centre O, tels que $P = sR_k$. *(On pourra remarquer que deux similitudes directes ayant même centre, même rapport et même angle sont égales.)*

2. **Polygone des milieux d'un polygone régulier.**
   (a) Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$, calculer $D(e_k)$ et $M(e_k)$.
   (b) En déduire que les endomorphismes D et M sont diagonalisables et déterminer leurs valeurs propres.
   (c) Vérifier que : $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ 1 + \omega^k = 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{\frac{ik\pi}{n}}$.
   (d) Prouver que, si $2k \neq n$, $m(R_k)$ se déduit de R_k par une similitude directe de centre O dont on précisera le rapport ρ_k et une mesure θ_k de l'angle.
   (e) En déduire que la configuration des milieux $Q = m(P)$ d'un polygone régulier P est encore un polygone régulier et indiquer comment Q se déduit de P.

3. **Caractérisation des polygones P dont le polygone des milieux est directement semblable à P.**
   (a) Soit $P = (A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n)$ un polygone dont l'isobarycentre est O, d'affixe u.
   Montrer que $m(P)$ est directement semblable à P si et seulement si u est vecteur propre de M. En déduire que si $m(P)$ est directement semblable à P alors P est de la forme $P = aR_k$, où $0 < k \leqslant n-1,\ 2k \neq n$, et où a est un nombre complexe non nul.
   (b) Déterminer les polygones P tels que $m(P)$ soit directement semblable à P.