Suites adjacentes, formule de Taylor et irrationalité de e

L'énoncé qui suit n'utilise que des outils figurant dans l'actuel programme de filière scientifique du lycée (à l'exception, stricto sensu, des notations $\sum$ et $n\,!$). Les prérequis sont : dérivation (en particulier dérivée d'un produit), intégrale, lien intégrale/primitive, conservation des inégalités larges par intégration, fonction exponentielle, suites convergentes, convergence des suites monotones bornées, théorème des gendarmes, raisonnement par récurrence.

Les résultats peuvent, sous une forme ou une autre, être incorporés dans les leçons : *Suites monotones*, *Limites de suites réelles*, *Problèmes conduisant à l'étude de suites*, *Fonctions exponentielles*, *Intégrales, primitives*, *Techniques de calcul d'intégrale*, *Séries numériques*, *Exemples d'utilisation d'un tableur/d'un logiciel de calcul formel* (pour la partie approximation de e), *Différents types de raisonnement en mathématiques* (raisonnements par récurrence et par l'absurde).

1. Soit (u_n) une suite de nombres réels croissante et majorée, donc en particulier convergente. Soit ℓ sa limite. Démontrer soigneusement l'assertion suivante
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \leqslant \ell.$$
On suppose en outre (u_n) strictement croissante. Démontrer soigneusement l'assertion suivante
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n < \ell.$$
2. Soit (u_n) et (v_n) deux suites de nombre réels. On suppose que (u_n) est croissante, que (v_n) est décroissante, qu'on a
$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \leqslant v_n$$
et que la suite $(v_n - u_n)$ est convergente de limite nulle. On dit alors que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes, de même limite.
3. Soit $a < b$ des réels, f et g des fonctions dérivables sur $[a, b]$ dont les dérivées sont continues sur $[a, b]$. Montrer la formule suivante (formule d'intégration par parties).
$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(t)g'(t)dt.$$

4. Montrer par récurrence la propriété suivante (cas particulier de la formule de Taylor-Lagrange)

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt.$$

   On pourra utiliser une intégration par parties.

5. Pour $n \in \mathbf{N}$ on pose $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $R_n = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt$.
   En encadrant les fonctions $t \mapsto (1-t)^n$ pour $t \in [0,1]$, montrer que la suite (R_n) est convergente, de limite nulle.
   En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

6. On conserve les notations précédentes. Pour $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ on pose $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$. Montrer que (u_n) est strictement croissante et que (v_n) est strictement décroissante. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

7. Déduire de ce qui précède qu'on a

$$\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}, \quad u_n < e < u_n + \frac{1}{n.n!} \quad (*).$$

8. En déduire, en justifiant, un rationnel (écrit sous forme irréductible) valeur approchée de e à 10^{-3} près, puis à 10^{-15} près (on pourra utiliser un outil logiciel).

9. En déduire également que e est irrationnel. On raisonnera par l'absurde en supposant que e s'écrit $\frac{M}{N}$, où M et N sont des entiers, $N \neq 0$. On écrira $(*)$ pour $n = N$ et on en déduira une contradiction en « chassant les dénominateurs » de manière convenable. Pourquoi avait-on absolument besoin que l'inégalité de gauche soit stricte dans $(*)$?