

## Chapitre 3

# Outils d'approximation. Suites récurrentes. Taylor-Lagrange

### 3.1 Suites récurrentes

Nous étudions dans cette section les suites récurrentes de nombres réels qui sont données par un réel  $u_0$  et la relation de récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$ , où  $f$  est une fonction à valeurs réelles définie sur  $D_f \subset \mathbb{R}$ . Une telle suite ne sera définie que si  $u_n \in D_f$  pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , ce dont on s'assure le plus souvent par récurrence sur  $n$ .

*Exercice.* 1) Est ce que la suite définie par  $u_0 = 3$  et  $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n - 1}$  est bien définie ?  
2) Même question pour  $v_0 = 5/4$  et  $v_{n+1} = 2\sqrt{v_n - 1}$ .

#### 3.1.1 Limites de suites récurrentes et points fixes

**Définition 3.1** On dit que  $\ell \in \mathbb{R}$  est un point fixe de la fonction  $f$  si  $f(\ell) = \ell$ .

Le résultat suivant est un outil souvent utile pour deviner la limite d'une suite récurrente.

**Proposition 3.2** Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $D$  de  $\mathbb{R}$ , et soit  $(u_n)$  une suite d'éléments de  $D$  vérifiant  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout  $n$ . Si la suite  $(u_n)$  a une limite  $\ell$  dans  $D$ , alors  $\ell$  est un point fixe de  $f$  : on a  $f(\ell) = \ell$ .

*Démonstration:* Par continuité de  $f$  on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = f(\ell)$ , et par ailleurs  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = \ell$ . On obtient bien  $f(\ell) = \ell$ .  $\square$

Ceci nous donne une stratégie souvent efficace pour rechercher la limite d'une suite récurrente, donnée par  $u_0$  et la relation  $u_{n+1} = f(u_n)$  avec  $f$  continue :

- trouver le ou les points fixes de  $f$ , qui sont les candidats à être limite de  $(u_n)$ ;
- ensuite, si  $\ell$  est un candidat, essayer de montrer que  $|u_n - \ell|$  tend vers 0.

Pour le deuxième point, si on peut trouver un réel  $r$ , avec  $0 \leq r < 1$ , tel que  $|u_{n+1} - \ell| \leq r|u_n - \ell|$ , alors on a gagné. En effet dans ce cas on a  $|u_n - \ell| \leq r^n|u_0 - \ell|$ , et la suite  $r^n$  tend vers 0.

Voyons par exemple la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = a \geq 0$  et  $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 1}$ . Ici la fonction  $f$  est donnée par  $f(x) = \sqrt{2x + 1}$ ; elle est définie et continue sur  $[-1/2, +\infty[$ . Un point fixe de  $f$  est solution de l'équation  $\ell = 1 + \sqrt{2}$ . On calcule, en se souvenant que  $\ell^2 = 2\ell + 1$  :

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \ell| &= |\sqrt{2u_n + 1} - \ell| = \frac{|(2u_n + 1) - \ell^2|}{|\sqrt{2u_n + 1} + \ell|} \\ &= \frac{|(2u_n + 1) - (2\ell + 1)|}{|\sqrt{2u_n + 1} + \ell|} = \frac{2}{|\sqrt{2u_n + 1} + \ell|} |u_n - \ell|. \end{aligned}$$

On a toujours  $u_n \geq 0$  et donc  $\sqrt{2u_n + 1} \geq 1$ . Donc on obtient

$$|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{2}{2 + \sqrt{2}} |u_n - \ell|,$$

et comme  $2/(2 + \sqrt{2}) < 1$  on conclut que  $\lim u_n = \ell = 1 + \sqrt{2}$ .

On peut aussi avoir à faire un raisonnement un peu plus délicat. Voyons un exemple : la suite  $(v_n)$  définie par  $v_0 = 2$  et  $v_{n+1} = (-3v_n + 1)/(v_n - 3)$ . Il n'est pas évident que la suite soit bien définie, car on pourrait aboutir à  $v_n = 3$ . Cherchons les points fixes de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = (-3x + 1)/(x - 3)$  pour  $x \neq 3$ . On résout  $x(x - 3) = -3x + 1$ , ce qui donne les deux solutions 1 et  $-1$ . On calcule ensuite

$$f(x) - 1 = \frac{-3x + 1}{x - 3} - 1 = \frac{-4}{x - 3} (x - 1) \quad \text{et} \quad f(x) + 1 = \frac{-3x + 1}{x - 3} + 1 = \frac{-2}{x - 3} (x + 1).$$

On remarque que si  $x \neq 1$  et  $x \neq 3$  on a

$$\frac{f(x) + 1}{f(x) - 1} = \frac{1}{2} \frac{x + 1}{x - 1}.$$

Revenons à notre suite. On a  $\frac{v_0 + 1}{v_0 - 1} = 3$ . On a par ailleurs  $\frac{3 + 1}{3 - 1} = 2$ . Donc on montre par récurrence que  $\frac{v_n + 1}{v_n - 1} = \frac{3}{2^n}$  et que  $v_n$  est toujours différent de 1 et de 3. Ceci assure déjà que la suite  $(v_n)$  est bien définie. Si on pose  $w_n = (v_n + 1)/(v_n - 1)$ , alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$ . De l'égalité  $w_n(v_n + 1) = v_n - 1$  on tire  $v_n = (w_n + 1)/(w_n - 1)$  (remarquer que  $w_n - 1$  n'est jamais nul). On conclut que  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = -1$ .

*Exercice.* L'exemple précédent est un exemple typique de *suite homographique*, donnée par une relation de récurrence du type

$$u_{n+1} = \frac{a u_n + b}{c u_n + d}.$$

1) Traiter sur le même modèle la suite définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{6u_n}{u_n + 4}.$$

2) Est ce que la suite définie par

$$v_0 = 2 \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{v_n + 1}{-v_n + 1}$$

converge ?

### 3.1.2 Fonction contractante

On va dégager des conditions sur la fonction  $f$  qui permettent d'affirmer que  $f$  a un point fixe, et qu'une suite définie par récurrence au moyen de  $f$  converge vers ce point fixe.

**Définition 3.3** Une fonction  $f$  à valeurs réelles définie sur le segment  $[a, b]$  est dite contractante sur le segment  $[a, b]$  s'il existe un nombre réel  $k$ , vérifiant  $0 \leq k < 1$ , tel que quels que soient  $x$  et  $y$  dans  $[a, b]$ , on a

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Insistons sur le point important :  $k$  est strictement plus petit que 1.

**Théorème 3.4** Soit  $f$  une fonction définie et contractante sur le segment  $[a, b]$ , et telle que  $f([a, b])$  est contenu dans  $[a, b]$ . Alors  $f$  a un unique point fixe  $\ell$  sur le segment  $[a, b]$ .

Soit  $\alpha$  un élément de  $[a, b]$ . Alors, en posant  $u_0 = \alpha$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$ , on définit bien une suite de nombre réels. La suite  $(u_n)$  est convergente, et sa limite est  $\ell$ .

*Démonstration:* D'après l'hypothèse il existe  $k$ ,  $0 \leq k < 1$  tel que pour tous  $x$  et  $y$  de  $[a, b]$  on a  $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ .

Montrons d'abord que la fonction  $f$  restreinte à  $[a, b]$  est continue. Soit  $x_0 \in [a, b]$  et  $\epsilon > 0$ . Pour tout  $x$  de  $[a, b]$  on a  $|f(x) - f(x_0)| \leq k|x - x_0|$ . Donc, pour avoir  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ , il suffit de prendre  $x \in [a, b]$  tel que  $|x - x_0| < \epsilon$ .

Puisque  $f$  restreinte à  $[a, b]$  est continue et envoie le segment  $[a, b]$  dans lui-même, on sait d'après la proposition 1.26 que  $f$  a un point fixe  $\ell$  dans  $[a, b]$ . Supposons qu'il y ait un autre point fixe  $m$  de  $f$  dans  $[a, b]$ . Puisque  $f(\ell) = \ell$  et  $f(m) = m$ , on a  $|f(\ell) - f(m)| = |\ell - m|$ , et par ailleurs on a  $|f(\ell) - f(m)| \leq k|\ell - m|$  avec  $k < 1$ . On aboutit à une contradiction si  $|\ell - m| \neq 0$ . On conclut que  $\ell$  est le seul point fixe de  $f$  dans  $[a, b]$ .

On se donne  $\alpha$  dans  $[a, b]$  et on pose  $u_0 = \alpha$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Par récurrence sur  $n$  on vérifie que  $u_n$  appartient à  $[a, b]$  et donc que  $f(u_n)$  est bien défini.

Enfin on a, pour  $n > 0$

$$|u_n - \ell| = |f(u_{n-1}) - f(\ell)| \leq k|u_{n-1} - \ell|.$$

On en déduit par récurrence

$$|u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell| \leq k^n (b - a),$$

ce qui montre que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell$ . □

Un moyen commode pour s'assurer qu'une fonction  $f$  dérivable sur  $[a, b]$  est contractante sur ce segment est de vérifier que la valeur absolue de sa dérivée est majorée sur  $[a, b]$  par un réel positif  $k < 1$ . Si c'est le cas, l'inégalité des accroissements finis nous donne bien

$$|f(y) - f(x)| \leq k |y - x|$$

pour tous  $x$  et  $y$  dans  $[a, b]$ . Formulons la conséquence du théorème 3.4 que l'on vient d'obtenir.

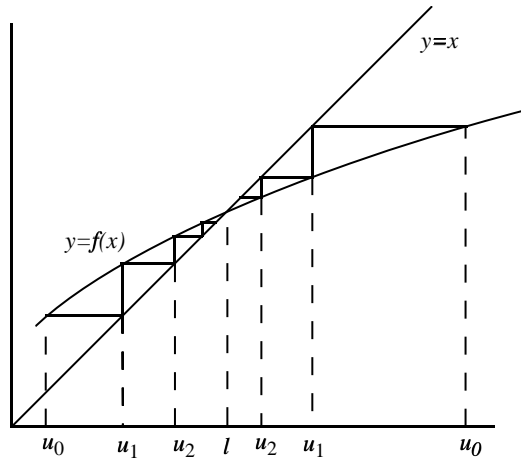
**Proposition 3.5** *Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur  $[a, b]$ . On suppose que  $f([a, b])$  est contenu dans  $[a, b]$ . On suppose aussi qu'il existe un nombre réel  $k$ , avec  $0 \leq k < 1$ , tel que pour tout  $x$  de  $[a, b]$ , on a  $|f'(x)| \leq k$ . Soit  $\alpha$  un élément de  $[a, b]$ , et soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = \alpha$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Alors la suite  $(u_n)$  converge, et sa limite est l'unique point fixe de  $f$  sur  $[a, b]$ .*

Remarquons que l'on arrive à la même conclusion si on prend  $\alpha$  à l'extérieur de  $[a, b]$  mais qu'il existe  $n$  tel que  $u_n \in [a, b]$ .

*Exercice.* On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = 1 + \frac{1}{4} \sin(1/x)$  pour  $x \neq 0$ . Trouver un segment  $[a, b]$  tel que  $f(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \subset [a, b]$  et sur lequel  $|f'(x)|$  est majorée par une constante strictement plus petite que 1. Que pouvez vous dire de la suite  $u_n$  définie par  $u_0 \neq 0$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$  ?

Il est utile de dessiner le graphe de la fonction  $f$  pour comprendre ce qui se passe.

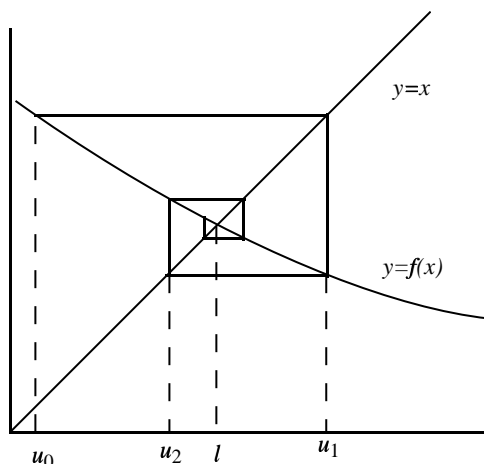
Figure 1



La figure 1 représente un cas où il y a un intervalle  $I$  autour d'un point fixe  $l$  de  $f$  sur lequel la dérivée de  $f$  est positive et majorée par une constante  $k < 1$ . La représentation graphique de la suite récurrente donne un "escalier montant" si on prend  $u_0$  dans  $I$  en dessous de  $l$ , et un "escalier descendant" si on prend  $u_0$  dans  $I$  au dessus de  $l$ .

*Exercice.* Vérifier dans le cas de l'escalier montant (resp. de l'escalier descendant) que le segment  $[u_0, l]$  (resp.  $[l, u_0]$ ) est envoyé dans lui-même par  $f$ , ce qui permet d'appliquer le théorème des fonctions contractantes.

Figure 2



La figure 2 représente un cas où il y a un intervalle  $I$  autour d'un point fixe  $\ell$  de  $f$  sur lequel la dérivée de  $f$  est négative et minorée par une constante  $k > -1$ . La représentation graphique de la suite récurrente donne alors un "escargot", si on prend  $u_0$  dans  $I$  tel que  $f(u_0) \in I$ .

*Exercice.* Vérifier que le segment  $[u_0, f(u_0)]$  (ou  $[f(u_0), u_0]$ ) est envoyé dans lui-même par  $f$ , ce qui permet d'appliquer le théorème des fonctions contractantes.

Reprenons l'exemple de la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = a \geq 0$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$  où la fonction  $f$  est donnée par  $f(x) = \sqrt{2x+1}$ . On sait qu'elle a un point fixe  $\ell = 1 + \sqrt{2}$ . On a  $f'(x) = 1/\sqrt{2x+1}$ , donc pour tout  $x \geq 1$  on a  $0 \leq f'(x) \leq 1/\sqrt{3}$ . Si  $0 \leq u_0 < \ell = 1 + \sqrt{2}$ , alors on a  $1 \leq u_1 \leq \ell$  et on est dans la situation de l'escalier montant pour la suite qui commence à  $u_1$ . Si  $u_0 > \ell$ , on est dans la situation de l'escalier descendant.

Si on n'est pas en situation d'appliquer le théorème des fonctions contractantes, on peut essayer d'avoir recours aux théorèmes généraux sur les suites croissantes majorées, sur les suites adjacentes, etc.. Un exemple est donné dans l'exercice suivant.

*Exercice.* Considérons la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 \geq 2$  et  $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n - 1}$  où  $f$  est définie par  $f(x) = 2\sqrt{x-1}$  pour  $x \geq 1$ . Déterminer le point fixe  $\ell$  de  $f$ . Que vaut  $f'(\ell)$ ? Pourquoi ne peut-on pas appliquer le théorème des fonctions contractantes sur le segment  $[\ell, u_0]$ ?

Montrer par récurrence que  $u_n \geq 2$ . Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante. Conclure.

Que se passerait-il si on avait pris  $1 \leq u_0 < 2$ ?

### 3.1.3 Vitesse de convergence

Considérons deux suites qui ont toutes les deux  $\sqrt{2}$  pour limite (voir le prochain exercice). La première suite est définie par  $u_0 = 3/2$  et

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right).$$

La deuxième suite est définie par  $v_0 = 3/2$  et

$$v_{n+1} = \frac{9}{20} v_n + \frac{11}{20} \frac{2}{v_n}.$$

*Exercice.* Soient  $f$  et  $g$  les fonctions définies respectivement par

$$f(x) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{2}{x} \right) \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{9}{20} x + \frac{11}{20} \frac{2}{x}.$$

Vérifier que  $f([1, 2]) \subset [1, 2]$  et  $g([1, 2]) \subset [1, 2]$ . Majorer  $|f'(x)|$  et  $|g'(x)|$  sur  $[1, 2]$ . Conclure pour les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ .

Jusqu'ici, les deux suites semblent avoir un comportement tout à fait semblable. Mais, expérimentalement, on constate qu'il n'en est rien. On donne les sept premiers termes des suites  $u_n$  et  $v_n$ , en indiquant en gras les décimales exactes (qui coïncident avec celles de  $\sqrt{2}$ ).

$u_0$	=	1,5
$u_1$	=	1.416...
$u_2$	=	1,414215...
$u_3$	=	1.4142135623746...
$u_4$	=	1,41421356237309504880168962...
$u_5$	=	1,4142135623730950488016887242096980785696718753772...
$u_6$	=	1,414213562373095048801688724209698078569671875376948073 17667973799073247846210703885038753432764160...

$v_0$	=	1,5
$v_1$	=	1,408333...
$v_2$	=	1,414815...
$v_3$	=	1,414153...
$v_4$	=	1,414219...
$v_5$	=	1,414212962...
$v_6$	=	1,414213622...

On constate que les deux suites ont un comportement complètement différent. La suite  $(u_n)$  converge beaucoup plus vite : à chaque étape, le nombre de décimales exactes double approximativement (2, 5, 11, 23, 47, 96). Autrement dit si l'erreur à une étape est de l'ordre de  $10^{-k}$ , à l'étape suivante elle est approximativement de l'ordre de  $10^{-2k}$ . Ce comportement constaté expérimentalement se retrouve par un petit calcul. On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \sqrt{2} &= \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{2}{u_n} \right) - \sqrt{2} \\ &= \frac{u_n^2 - 2\sqrt{2}u_n + 2}{2u_n} = (u_n - \sqrt{2})^2 \frac{1}{2u_n}. \end{aligned}$$

Cette égalité permet de vérifier par récurrence qu'on a  $u_n \geq \sqrt{2}$  pour tout  $n$ . On obtient

$$u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}(u_n - \sqrt{2})^2,$$

ce qui correspond bien au comportement constaté. On dit que la suite  $(u_n)$  a une *convergence quadratique* : l'erreur au rang  $n + 1$  est majorée par une constante fois le carré de l'erreur au rang  $n$ .

Par contre, pour la suite  $v_n$  on n'a pas de majoration du même type. On constate qu'on est dans la situation de l'escargot (on a  $g'(x) < 0$  pour  $x < \sqrt{22/9} = 1,56\dots$ ), et donc tous les  $u_n$  sont dans le segment  $[\frac{7}{5}, \frac{3}{2}]$  sur lequel on peut majorer  $|g'(x)|$  par  $\frac{109}{980} < \frac{12}{100}$ . On obtient donc :

$$|v_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{12}{100} |v_n - \sqrt{2}|.$$

L'erreur est en gros divisée par 10 à chaque étape. Ceci correspond à ce que l'on constate expérimentalement. On dit que la suite  $(v_n)$  a une *convergence linéaire* : l'erreur au rang  $n + 1$  est majorée par une constante ( $< 1$ ) fois l'erreur au rang  $n$ .

Les estimations qui découlent du théorème des accroissements finis ne pourront pas indiquer autre chose qu'une convergence linéaire. Pour pouvoir analyser les phénomènes de convergence quadratique, il nous faut un outil plus puissant : c'est la formule de Taylor avec reste de Lagrange, que nous allons établir dans la prochaine section.

*Exercice.* Si l'on veut 1000 décimales de  $\sqrt{2}$ , combien de termes de la suite  $(u_n)$  faut-il calculer ? Combien pour la suite  $(v_n)$  ?

Le calcul de  $\sqrt{2}$  au moyen de la suite  $(u_n)$  ci-dessus est très efficace du fait de la convergence quadratique. Il est connu sous le nom de méthode de Héron. Il rentre dans le cadre général de la *méthode de Newton* pour la résolution numérique d'équations, que nous verrons plus loin.

## 3.2 Formule de Taylor avec reste de Lagrange. Quelques applications.

### 3.2.1 La formule

Cette formule généralise le théorème des accroissements finis. Elle généralise aussi la formule de Taylor pour les polynômes.

**Théorème 3.6 (Taylor - Lagrange)** Soient  $a < b$  deux réels. Soit  $f$  une fonction réelle qui a des dérivées à l'ordre  $n$  sur  $[a, b]$ , telle que  $f^{(n)}$  est continue sur  $[a, b]$  et que  $f^{(n+1)}$  existe sur  $]a, b[$ . Alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(a) + \frac{(b - a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(b - a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b - a)^{n+1}}{(n + 1)!}f^{(n+1)}(c).$$

On a le même résultat avec deux réels  $b < a$ , en changeant bien sûr l'ordre dans lequel on écrit les bornes des intervalles.

La formule écrite est la *formule de Taylor à l'ordre  $n$  avec reste de Lagrange pour la fonction  $f$  entre  $a$  et  $b$* . Le reste est  $((b-a)^{n+1}/(n+1)!)f^{(n+1)}(c)$ . A l'ordre 0, on retrouve bien le théorème des accroissements finis. Les hypothèses qui sont données sont un petit peu compliquées, elles visent à avoir l'énoncé le plus général possible. Dans la pratique, on applique souvent le théorème à une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  sur un intervalle contenant  $a$  et  $b$ , auquel cas les hypothèses sont vérifiées quel que soit  $n$ .

*Démonstration:* On se place dans le cas  $a < b$ . L'équation

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\lambda$$

détermine bien un unique nombre réel  $\lambda$ . On veut montrer qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $\lambda = f^{(n+1)}(c)$ . Pour cela, on pose

$$g(x) = f(b) - f(x) - (b-x)f'(x) - \frac{(b-x)^2}{2!}f''(x) - \dots - \frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n)}(x) - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}\lambda.$$

Grâce aux hypothèses faites sur  $f$ , la fonction  $g$  est continue sur  $[a, b]$ , et dérivable sur  $]a, b[$ . Sa dérivée vaut

$$\begin{aligned} g'(x) &= -f'(x) - \left(-f'(x) + \frac{b-x}{1!}f''(x)\right) - \left(-\frac{b-x}{1!}f''(x) + \frac{(b-x)^2}{2!}f'''(x)\right) - \dots \\ &\quad \dots - \left(-\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x) + \frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x)\right) + \frac{(b-x)^n}{n!}\lambda \\ &= \frac{(b-x)^n}{n!}(\lambda - f^{(n+1)}(x)). \end{aligned}$$

La fonction  $g$  est faite pour que  $g(a) = g(b) = 0$ . On peut lui appliquer le théorème de Rolle, qui montre qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que

$$0 = g'(c) = \frac{(b-c)^n}{n!}(\lambda - f^{(n+1)}(c)),$$

et donc  $\lambda = f^{(n+1)}(c)$ . □

La formule de Taylor-Lagrange a des variantes d'écriture. En posant  $b = a + h$ , tout réel strictement compris entre  $a$  et  $a + h$  peut s'écrire sous la forme  $a + \theta h$  avec  $0 < \theta < 1$ . Donc, sous les hypothèses du théorème avec  $b = a + h$ , il existe  $\theta$  avec  $0 < \theta < 1$  tel que

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h).$$

Le  $\theta$  de la formule dépend de  $a$  et de  $h$ . Dans le cas particulier où  $a = 0$  (et avec  $x$  à la place de  $h$ , pour changer), la formule

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)$$



est appelée *formule de Maclaurin* (avec reste de Lagrange).

L'inégalité des accroissements finis est utile pour obtenir des majorations. La formule de Taylor-Lagrange a aussi cette utilité. Voici deux premiers exemples d'utilisation.

**Exemple 1.** La fonction exponentielle est dérivable à tous les ordres sur  $\mathbb{R}$ . On peut donc écrire la formule de Maclaurin à n'importe quel ordre  $n$ . Pour tout réel  $x$ , il existe  $\theta$  avec  $0 < \theta < 1$  tel que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}.$$

Posons  $u_n(x) = 1 + x + x^2/2! + \cdots + x^n/n!$ . Montrons que pour tout  $x$ , la suite  $u_n(x)$  tend vers  $e^x$ . On a à montrer que pour  $x$  fixé, le reste de la formule de Maclaurin tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini. On peut majorer la valeur absolue du reste par  $(x^{n+1}/(n+1)!)e^x$  quand  $x \geq 0$  et par  $|x|^{n+1}/(n+1)!$  quand  $x < 0$ . On laisse à titre d'exercice la vérification que ces quantités tendent vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini.

On peut reprendre cet exercice en remplaçant l'exponentielle par le sinus ou le cosinus. Ces exemples semblent indiquer que pour une fonction dérivable à tous les ordres sur  $\mathbb{R}$  et pour  $x$  fixé, le reste de la formule de Maclaurin tend vers 0 quand l'ordre  $n$  tend vers l'infini. Mais ce n'est pas toujours le cas. Si on définit la fonction  $f$  par  $f(0) = 0$  et  $f(x) = e^{-1/x^2}$  pour  $x \neq 0$ , alors on montre que  $f$  est dérivable à tous les ordres sur  $\mathbb{R}$ , et que pour tout  $n$  on a  $f^{(n)}(0) = 0$ . Donc dans la formule de Maclaurin pour  $f$  à n'importe quel ordre, la partie avant le reste est nulle, et le reste est toujours égal à  $f(x)$ ; il ne tend pas vers 0.

**Exemple 2.** On va reprendre ici l'analyse de la convergence quadratique de la méthode de Héron pour calculer  $\sqrt{2}$ . On rappelle que l'on utilise la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 3/2$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$  où  $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$ . La fonction  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Pour  $x \in [1, 2]$ , écrivons la formule de Taylor-Lagrange pour  $f$  à l'ordre 1 entre  $\sqrt{2}$  et  $x$ . Il existe  $c$  entre  $\sqrt{2}$  et  $x$  tel que

$$f(x) = f(\sqrt{2}) + (x - \sqrt{2})f'(\sqrt{2}) + \frac{(x - \sqrt{2})^2}{2} f''(c).$$

On a  $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ ,  $f'(\sqrt{2}) = 0$ ,  $f''(t) = -2/t^3$ . Donc,

$$f(x) = \sqrt{2} + \frac{(x - \sqrt{2})^2}{2} \frac{-2}{c^3}.$$

Puisqu'on a supposé  $x \in [1, 2]$ , on a aussi  $c \in [1, 2]$  et on peut majorer  $2/c^3$  par 2. On obtient ainsi  $|f(x) - \sqrt{2}| \leq (x - \sqrt{2})^2$ , et par conséquent  $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq (u_n - \sqrt{2})^2$ . Cette majoration est un peu moins bonne que celle que l'on avait obtenu par un calcul direct. Mais ce qui compte est que la formule de Taylor-Lagrange permet de mettre en évidence la convergence quadratique, ce qu'on n'arrivait pas à faire avec les accroissements finis.

On remarque que ce qui permet d'obtenir la convergence quadratique est le fait que  $f'(\sqrt{2}) = 0$ , c'est-à-dire que la dérivée de la fonction qu'on itère s'annule au point fixe.

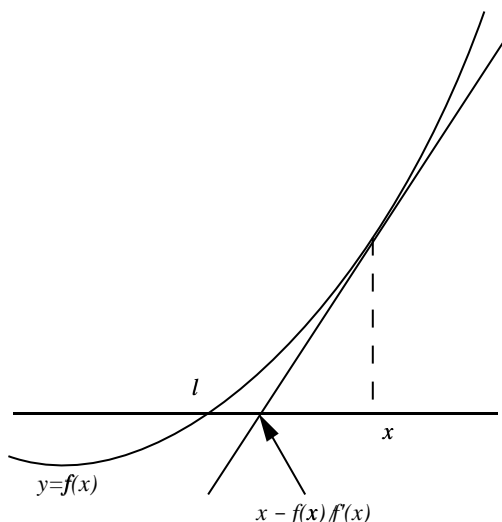
Brook Taylor (1685–1731) fut un élève de John Machin (dont nous rencontrerons plus loin la formule servant à calculer  $\pi$ ) à Cambridge. La "formule de Taylor" apparaît dans un de ses

ouvrages. Mais son importance n'apparut qu'en 1772, quand Lagrange réalisa sa puissance et la prit comme principe fondamental du calcul différentiel. Colin Maclaurin (1698-1746) est un autre représentant de l'école mathématique britannique qui développa le calcul différentiel à la suite de Newton.

### 3.2.2 La méthode de Newton

Soit par exemple  $f$  une fonction polynôme (la méthode s'applique aussi à d'autres fonctions), et soit  $\ell$  une solution de l'équation  $f(x) = 0$ , avec  $f'(\ell) \neq 0$ . On cherche à calculer numériquement  $\ell$ . L'idée de l'algorithme se comprend facilement sur la figure 3. Si l'on part de  $x$  pas trop loin de  $\ell$ , et si l'on trace la tangente au graphe de  $f$  au point  $(x, f(x))$ , l'intersection de cette tangente avec l'axe des  $x$  va donner une approximation de  $\ell$ .

Figure 3



Comme  $f'(\ell) \neq 0$ , il y a un intervalle ouvert contenant  $\ell$  sur lequel  $f'$  ne s'annule pas. La fonction  $\Phi$  définie sur cet intervalle par  $\Phi(x) = x - f(x)/f'(x)$  y est dérivable, et sa dérivée vaut

$$\Phi'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}.$$

On constate que  $\ell$  est un point fixe de  $\Phi$ . On constate aussi que  $\Phi'(\ell) = 0$ , et donc il existe  $h > 0$  tel que, pour tout  $x$  de  $[\ell - h, \ell + h]$ , on a  $|\Phi'(x)| \leq 1/2$ . On part d'une valeur  $u_0 = a$  pas trop loin de  $\ell$ , disons dans le segment  $[\ell - h, \ell + h]$ . On définit par récurrence la suite  $(u_n)$  par la relation

$$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}.$$

D'après la proposition 3.5, puisque  $\Phi$  est contractante sur  $[\ell - h, \ell + h]$  et envoie  $[\ell - h, \ell + h]$  dans lui-même, la suite  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ . Si l'équation que l'on cherche à résoudre est

$x^2 - 2 = 0$ , on retrouve bien la relation de la méthode de Héron :

$$u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^2 - 2}{2u_n} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{2}{u_n} \right).$$

Voyons maintenant pourquoi la méthode de Newton assure une convergence quadratique, c'est-à-dire que  $|\ell - u_{n+1}|$  est majoré par une constante fois le carré de  $|\ell - u_n|$ . La fonction  $\Phi$  est deux fois continûment dérivable sur  $[\ell - h, \ell + h]$ . On note  $M$  le maximum de  $|\Phi''(x)|$  sur  $[\ell - h, \ell + h]$ .

On écrit la formule de Taylor-Lagrange pour  $\Phi$  à l'ordre 1 entre  $\ell$  et  $x \in [\ell - h, \ell + h]$ . Il existe  $c$  entre  $\ell$  et  $x$  tel que

$$\Phi(x) = \Phi(\ell) + (x - \ell)\Phi'(\ell) + \frac{(x - \ell)^2}{2}\Phi''(c) = \ell + \frac{(x - \ell)^2}{2}\Phi''(c).$$

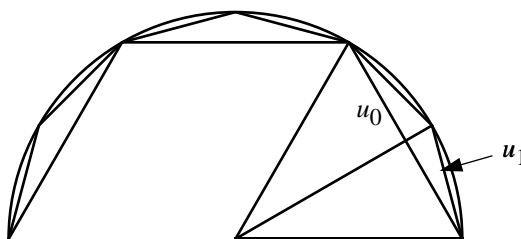
Puisque  $c \in [\ell - h, \ell + h]$ , on en déduit  $|\Phi(x) - \ell| \leq \frac{M}{2}(x - \ell)^2$ . En prenant  $x = u_n$ , on a  $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{M}{2}|u_n - \ell|^2$ . La convergence est bien quadratique.

*Exercice.* Décrire une méthode de calcul de  $\sqrt[3]{2}$  qui ait une convergence quadratique.

### 3.2.3 Calcul de $\pi$ . Accélération de convergence

Archimède (287-212 av. J-C) a donné une méthode de calcul de  $\pi$  qui repose sur l'approximation du cercle par des polygones réguliers. On commence avec un hexagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1. Chaque côté a pour longueur  $u_0 = 1$  (le triangle avec un côté pour base et le centre du cercle pour sommet est équilatéral), et le demi-périmètre est  $p_0 = 3u_0 = 3$ . Ensuite, on double le nombre de côtés pour obtenir un dodécagone régulier (à douze côtés) de côté  $u_1$  et de demi-périmètre  $p_1 = 6u_1$ . On itère pour avoir après  $n$  itérations un polygone régulier à  $6 \cdot 2^n$  côtés, chacun de longueur  $u_n$  et de demi-périmètre  $p_n = 3 \cdot 2^n u_n$ . Chaque côté est la base d'un triangle isocèle de sommet le centre du cercle, et l'angle au sommet est  $\frac{\pi}{3 \cdot 2^n}$ . On a donc

$$u_n = 2 \sin \left( \frac{\pi}{6 \cdot 2^n} \right) \quad \text{et} \quad p_n = 6 \cdot 2^n \sin \left( \frac{\pi}{6 \cdot 2^n} \right).$$



Ce ne sont pas ces formules qui permettent de calculer  $u_n$  et  $p_n$ , mais on a la formule de récurrence

$$u_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - u_n^2}}.$$

*Exercice.* Démontrer cette formule de récurrence. Utiliser

$$\sin^2 \theta = 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}\right).$$

On s'est ramené à des opérations algébriques et à l'extraction de racines carrées qu'on peut calculer en utilisant la méthode de Héron.

Le fait que la suite  $(p_n)$  tend vers  $\pi$  est intuitivement évident d'après la construction géométrique. On le retrouve aussi sur la formule donnée pour  $p_n$ .

*Exercice.* Quelle est la limite de  $\frac{1}{x} \sin(\pi x)$  quand  $x$  tend vers 0 ? En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$ .

Examinons maintenant le type de convergence donné par l'algorithme d'Archimède. On écrit la formule de Maclaurin pour la fonction sinus à l'ordre 2. Il existe  $\theta$  entre 0 et 1 tel que

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} \cos(\theta x).$$

On en déduit  $|\sin x - x| \leq |x|^3/6$ . En faisant  $x = \pi/(6 \cdot 2^n)$  dans cette inégalité et en multipliant par  $6 \cdot 2^n$ , on obtient

$$|p_n - \pi| \leq \frac{\pi^3}{216 \cdot 2^{2n}}.$$

En passant de l'étape  $n$  à l'étape  $n + 1$ , l'erreur est divisée par 4. On a une convergence linéaire.

Huygens (1596 - 1687) a donné un moyen d'accélérer la convergence de l'algorithme d'Archimède, qui consiste à considérer la suite des  $\frac{4}{3} p_{n+1} - \frac{1}{3} p_n$ . Nous allons expliquer pourquoi ceci marche (l'explication donnée, qui repose sur la formule de Taylor, n'est bien sûr pas celle de Huygens). On écrit maintenant la formule de Maclaurin pour sinus à l'ordre 4. Il existe  $\theta'$  entre 0 et 1, dépendant de  $x$ , tel que

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \cos(\theta' x).$$

En faisant  $x = \pi/(6 \cdot 2^n)$  (resp.  $x = \pi/(6 \cdot 2^{n+1})$ ) dans cette égalité et en multipliant par  $6 \cdot 2^n$  (resp.  $6 \cdot 2^{n+1}$ ), on obtient

$$\begin{aligned} p_n &= \pi - \frac{\pi^3}{216 \cdot 2^{2n}} + \frac{\pi^5}{120 \cdot 6^4 \cdot 2^{4n}} \cos\left(\theta'_n \frac{\pi}{6 \cdot 2^n}\right) \\ p_{n+1} &= \pi - \frac{\pi^3}{216 \cdot 2^{2(n+1)}} + \frac{\pi^5}{120 \cdot 6^4 \cdot 2^{4(n+1)}} \cos\left(\theta'_{n+1} \frac{\pi}{6 \cdot 2^{n+1}}\right) \end{aligned}$$

Notons  $c_n$  (resp.  $c_{n+1}$ ) le cosinus qui apparaît dans la formule pour  $p_n$  (resp.  $p_{n+1}$ ). Si on calcule  $-\frac{1}{3}p_n + \frac{4}{3}p_{n+1}$ , on fait disparaître du côté droit les termes avec  $2^{2n}$  et  $2^{2(n+1)}$  au dénominateur :

$$-\frac{1}{3}p_n + \frac{4}{3}p_{n+1} = \pi - \frac{1}{3} \frac{\pi^5}{120 \cdot 6^4 \cdot 2^{4n}} c_n + \frac{4}{3} \frac{\pi^5}{120 \cdot 6^4 \cdot 2^{4(n+1)}} c_{n+1},$$

d'où l'on déduit, en posant  $v_n = -\frac{1}{3}p_n + \frac{4}{3}p_{n+1}$  en encadrant les cosinus entre 0 et 1,

$$|v_n - \pi| \leq \frac{\pi^5}{360 \cdot 6^4 \cdot 2^{4n}}.$$

La suite  $(v_n)$  tend vers  $\pi$ . Cette fois-ci l'erreur est divisée par 16 à chaque étape. la convergence est toujours linéaire, mais elle a bien été accélérée. (Voir aussi l'exercice 11 page 14 du recueil d'exercices)

Une autre méthode historique de calcul de  $\pi$  est due à John Machin (1680 -1752). Elle repose sur la formule

$$\pi = 16 \arctan \frac{1}{5} - 4 \arctan \frac{1}{239}.$$

*Exercice.* Vérifiez cette formule. Pour ceci, calculez en utilisant les formules d'addition pour les tangentes  $\tan(2 \arctan \frac{1}{5})$ ,  $\tan(4 \arctan \frac{1}{5})$  et  $\tan(4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239})$ .

Il faut expliquer comment calculer les arctangentes. On part de

$$(1 + t^2)(1 - t^2 + t^4 - \dots + (-1)^n t^{2n}) = 1 + (-1)^n t^{2n+2},$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{1 + t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \dots + (-1)^n t^{2n} - (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1 + t^2}.$$

En intégrant entre 0 et  $x$ , il vient

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt.$$

Remarque : on aurait pu obtenir une formule de ce type en utilisant la formule de Maclaurin à l'ordre  $2n+2$  pour la fonction arctangente, mais le reste aurait été plus difficile à estimer parce qu'on n'a pas de formule simple pour les dérivées de  $\arctan$ .

Posons

$$u_n(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Alors (on suppose  $x > 0$ ) :

$$|\arctan x - u_n(x)| \leq \left| \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \right| \leq \int_0^x t^{2n+2} dt = \frac{x^{2n+3}}{2n+3}.$$

Si l'on pose  $w_n = 16 u_n(\frac{1}{5}) - 4 u_n(\frac{1}{239})$ , alors  $w_n$  tend vers  $\pi$  et

$$|w_n - \pi| \leq \frac{1}{2n+3} \left( \frac{1}{5^{2n+3}} + \frac{1}{239^{2n+3}} \right).$$

La convergence est linéaire, l'erreur à chaque étape est en gros divisée par 25. C'est mieux que la méthode d'Archimède, même accélérée par Huygens, et en plus il n'y a pas besoin

d'extraire de racines carrées.

Archimède	Huygens	Machin
3		3,183 ...
3,105 ...	3,1411 ...	3,1405 ...
3,132 ...	3,141562 ...	3,14162 ...
3,139 ...	3,1415907 ...	3,1415917 ...
3,14103 ...	3,14159253 ...	3,141592682 ...
3,14145 ...	3,141592646 ...	3,1415926526 ...

Des formules du type de la formule de Machin ont permis de calculer sur ordinateur plusieurs centaines de milliers de décimales de  $\pi$ . Mais l'histoire ne s'arrête pas là : un algorithme de calcul de  $\pi$  a été proposé en 1976 par Salamin. Il donne une convergence *quadratique*, donc beaucoup plus rapide. Nous ne ferons pas l'étude de cet algorithme ici. Elle n'est cependant pas hors de portée : elle a même fait l'objet d'une des épreuves du CAPES de Mathématiques en 1995. Un exemple qui montre que les mathématiques, même si elles reposent sur une longue histoire, sont loin d'être mortes !