Université de Rennes

PRA2 - Analyse 2

Correction rapide du contrôle du 21 mail 2026

Exercice n°1 (*5,5 points*)

1) Faux. La suite de terme général $u_n = -n-1$ est <u>strictement</u> décroissante, n'a pas de terme nul, et vérifie pour tout n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{-n-2}{-n-1} = 1 + \dfrac{1}{n+1} \geqslant 1$.

Remarque après correction : Une suite peut être à la fois croissante et décroissante...

2) Vrai. $t \longmapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est continue donc intégrable sur $[x,1]$ pour $x \in]0,1]$.

$$\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \begin{cases} \left[\dfrac{1}{\alpha-1}\dfrac{-1}{t^{\alpha-1}}\right]_x^1 = \dfrac{1}{\alpha-1}\left(\dfrac{1}{x^{\alpha-1}}-1\right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ [\ln(t)]_x^1 = -\ln x & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\text{donc} \qquad \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \xrightarrow[x\to 0^+]{} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha - 1 \geqslant 0 \\ \dfrac{-1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha - 1 < 0 \end{cases}$$

3) Vrai. h est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ puisque $f : x \mapsto |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f(\mathbb{R}^*) =]0,+\infty[$ domaine sur lequel $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable (théorème de composition). De plus, $\dfrac{h(x)-h(0)}{x-0} = \sqrt{|x|} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc h est aussi dérivable en 0 (et $h'(0) = 0$).

Exercice n°2 (*12,5 points*)

1) f est un quotient de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ (la fonction au dénominateur ne s'annulant pas sur ce domaine). f est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$. De plus, $\dfrac{e^x-1}{x} = \dfrac{e^x - e^0}{x-0} \xrightarrow[x\to 0]{} \exp'(0) = \dfrac{1}{1} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$ et f est donc continue sur $\mathbb{R}$. Enfin, $\forall x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x-1)^2}$. Or, $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$ donc $e^x - 1 - xe^x = -\frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2) \underset{x\to 0}{\sim} (-\frac{1}{2}x^2)$. On a donc $f'(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} f'(x) = -\dfrac{1}{2}$. Le théorème de la limite de la dérivée permet finalement d'affirmer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (et que $f'(0) = -\frac{1}{2}$).

Remarque après correction : On pouvait bien sûr utiliser la règle de l'Hospital mais cet outil semble un peu disproportionné pour des limites classiques de Terminale...

2) • La question précédente montre que $f'(0) < 0$ et que, pour $x \neq 0$, $f'(x)$ est du signe de $u(x) = e^x - 1 - xe^x$. u est clairement dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = -e^x + (1-x)e^x = -xe^x$. u est donc strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement décroissante sur $[0,+\infty[$. Comme $u(0) = 0$, on a en particulier $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $u(x) < 0$.
On a donc bien finalement $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) < 0$.
• Comme $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$, on a $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x - 1 = -1$ et donc $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$.
Pour $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{x}{e^x} . \dfrac{1}{1-e^{-x}}$ et donc, par croissances comparées entre les fonctions puissances et exponentielle, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$.
f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. C'est donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R}) =]\lim\limits_{+\infty} f, \lim\limits_{-\infty} f[$. On a donc bien $f(\mathbb{R}) =]0,+\infty[$.

3) Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(x) = x \iff \dfrac{1}{e^x - 1} = 1$ (car 0 n'est clairement pas solution) d'où $f(x) = x \iff 1 = e^x - 1$. f a donc bien un unique point fixe : $\alpha = \ell n\, 2$.

4) • Soit $x \in]0,+\infty[$. La fonction exponentielle est continue sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$. Le théorème des accroissements finis assure alors l'existence d'un $c \in]0,x[$ tel que $e^x - e^0 = (x-0)\exp'(c)$. Comme $\exp'(c) = e^c \geqslant e^0 = 1$ (la fonction exponentielle est croissante), on a bien (en multipliant par $x \geqslant 0$) $e^x - 1 \geqslant x$.

<u>*Remarque après correction :*</u> *On pouvait aussi (et c'est plus rapide) utiliser la convexité de la fonction exponentielle...*

• $\varphi : x \longmapsto e^{2x} - 2xe^x - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a : $\forall x \geqslant 0,\ \varphi'(x) = 2e^{2x} - 2e^x - 2xe^x$ soit $\varphi'(x) = 2e^x[e^x - 1 - x]$. L'inégalité précédente montre alors que $\forall x \geqslant 0,\ \varphi'(x) \geqslant 0$. φ est donc croissante sur $[0,+\infty[$. Comme $\varphi(0) = 0$, on a donc bien finalement $\forall x \in [0,+\infty[\quad e^{2x} - 2xe^x - 1 \geqslant 0$.

• Soit alors $x \in \mathbb{R}_+^*$. $f'(x) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x-1)^2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{2e^x - 2 - 2xe^x + e^{2x} - 2e^x + 1}{2(e^x-1)^2}$ soit après simplifications :
$f'(x) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x-1)^2}$. La question précédente donne alors $f'(x) + \dfrac{1}{2} \geqslant 0$.
Finalement, d'après 2), $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ -\frac{1}{2} \leqslant f'(x) < 0$.

• On sait que f est continue sur $[0,+\infty[$, dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x \in]0,+\infty[,\ |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$. Pour a et b positifs, l'inégalité des accroissements finis assure alors que $|f(b) - f(a)| \leqslant \dfrac{1}{2}|b-a|$.

5) Soit $n \in \mathbb{N}$. Une récurrence immédiate assurant que $u_n > 0$ (car $f(\mathbb{R}) \subset]0,+\infty[$), on peut appliquer 4) avec $b = u_n$ et $a = \alpha$. Cela donne $|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$ soit $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

Pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, notons alors $\mathscr{P}_n$ la propriété : « $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}|1-\alpha|$. »

- *(initialisation)* On a $|u_0 - \alpha| = |1-\alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^0}|1-\alpha|$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
- *(hérédité)* Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons $\mathscr{P}_n$ vraie et montrons qu'alors $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. D'après a), $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$. donc, par hypothèse de récurrence, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2^n}|1-\alpha| = \dfrac{1}{2^{n+1}}|1-\alpha|$. On a bien montré $\mathscr{P}_{n+1}$.
- *(conclusion)* D'après le théorème de récurrence on a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}|1-\alpha|$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge finalement vers α.

Exercice n°3 (*7 points*)

1) Soient $n \geqslant 1$ et $x \geqslant 0$.

a) Pour tout t de $[0,x]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-t)^k$ est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $-t \neq 1$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-t)^k = \frac{1-(-t)^n}{1+t}$.

b) Ces fonctions de t étant continues et l'intégrale étant linéaire, on en déduit :
$$\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^x (-t)^k \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t} - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\mathrm{d}t \text{ soit } \ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,dt$$

c) On reconnaît ici la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $n-1$, appliquée entre 0 et x à la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$.

2) $\forall t \in [0,1],\ 0 \leqslant \dfrac{t^n}{1+t} \leqslant t^n$ donc, par croissance de l'intégrale (on a bien $0 < 1$), $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+x}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t = 0$.

3) La question 1) appliquée avec $x = 1$ donne $\forall n \geqslant 1,\ \ln 2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+1} + (-1)^n\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt$. D'après 2), la somme partielle $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}$ a donc une limite finie quand n tend vers l'infini : la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge. En passant à la limite, on a de plus $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$.