Université de Rennes

PRA2 - Analyse 2

Contrôle continu du jeudi 21 mai 2026

Durée : 2 heures

Ce sujet est composé de trois exercices totalement indépendants.

La clarté et la précision des raisonnements, la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les calculatrices sont interdites comme, bien sûr, tous les objets connectés.

Exercice n°1 (*4 points*)

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. On justifiera la réponse en démontrant la propriété ou en exhibant un contre-exemple.

1) Si une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est telle que pour tout entier naturel n, $u_n \neq 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ alors cette suite est croissante.

2) L'intégrale $\displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ a une limite finie lorsque x tend vers 0 si et seulement si le réel α vérifie $\alpha < 1$.

3) La fonction $h : x \longmapsto x\sqrt{|x|}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice n°2 (*10 points*)

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

2) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) < 0$ puis que $f(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$. On trouvera une unique solution que l'on nommera α.

4) Établir que : $\forall x \in]0, +\infty[\quad e^{2x} - 2xe^x - 1 \geqslant 0$. (On pourra remarquer que : $\forall x \in]0, +\infty[\quad e^x - 1 \geqslant x$.)
En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $-\dfrac{1}{2} \leqslant f'(x) < 0$ puis que $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $|f(b) - f(a)| \leqslant \dfrac{1}{2}|b - a|$.

5) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer, à l'aide de ce qui précède, que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}|1 - \alpha|$.
Qu'en déduit on pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Tourner la page

$\boxed{\textbf{Exercice n°3}}$ (*6 points*)

1) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1 et soit x un réel positif ou nul.

a) Soit $t \in [0, x]$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-t)^k$.

b) En déduire que :

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\, dt$$

c) Cette dernière formule a un nom. Lequel ?

2) Démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\, \mathrm{d}t = 0$. (On pourra s'aider d'un encadrement.)

3) Montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n}$ et donner la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Fin du sujet.