Situations basiques d'exercices dans différents thèmes (et utilisant le plus souvent les TICE)

Pour chacune des situations suivantes, on précisera les connaissances et compétences nécessaires aux élèves pour effectuer le travail demandé. On en déduira alors le niveau où ce travail peut être demandé à un élève, en fonction des programmes d'enseignement actuellement en vigueur[1].

I. Statistiques (TICE)

Situation 11 : Stabilisation des fréquences
Réaliser, sous tableur, la simulation de 1000 lancers d'un dé équilibré, pour laquelle on observe l'évolution de la fréquence d'apparition du « 6 ». Représenter graphiquement cette fréquence de succès (relative à l'apparition du « 6 ») en fonction du nombre de lancers.

Situation 12 : intervalle de fluctuation d'une fréquence au seuil de 95%
Réaliser, sous tableur, la simulation de 1000 échantillons de 100 d'un schéma de Bernoulli de probabilités de succès p, avec $p \in]0; 1[$. Représenter alors le nuage des points dont l'abscisse est le numéro de l'échantillon et l'ordonnée, sa fréquence (ou son nombre) de succès associée.

Situation 13 : intervalle de fluctuation d'une fréquence au seuil de 95%
Au jeu de la boule, on dit que l'on a « 4 chances sur 9 d'obtenir la couleur Rouge ».
Réaliser un algorithme permettant de simuler N « jeux de la boule » et qui compte les succès de ces jeux. Le programmer et le lancer sur 100 jeux. Commenter le résultat de cette simulation ?

Situation 14 : « Prise de décision »
Dans un sac opaque sont placées 10000 billes de forme identique et de couleur noire ou blanche. On s'intéresse à la proportion de billes blanches dans ce sac.
Établir un protocole permettant, avec un niveau de confiance de 95% un encadrement de la proportion de boules blanches dans le sac.

II. Probabilités (TICE)

Situation 21 : Epreuve de Bernoulli
Réaliser un algorithme permettant de simuler une expérience de Bernoulli de probabilité de succès p avec $p \in]0; 1[$. Le transcrire sur calculatrice et sur tableur.

Situation 22 : Loi binomiale
Réaliser un algorithme générant une liste de taille n, des succès obtenus lors d'une répétition de m épreuves de Bernoulli de probabilité de succès p. (m et n entier positif). Le transcrire sur calculatrice et sur tableur.

Situation 23 : « Loi géométrique »
On considère l'expérience aléatoire du lancer d'un dé équilibré, pour lequel on note le numéro affiché sur sa face supérieure. On réalise cette expérience aléatoire, jusqu'à obtenir « 6 ».
Réaliser un algorithme qui génère, sur n jeux, le nombre de coups nécessaires à l'obtention du « 6 ». Programmer cet algorithme sur calculatrice ou tableur et lancer le pour 100 jeux.
D'après ces résultats, en moyenne, combien de coups sont nécessaires ?

[1] Ces programmes sont par exemple disponibles sur le site officiel de l'éducation national « éduscol », à l'adresse : http://www.eduscol.education.fr/pid23199/programmes-certifications.html

Situations basiques d'exercices dans différents thèmes (et utilisant le plus souvent les TICE)

III. Arithmétique (TICE)

Situation 31 : Diviseurs
Réaliser deux algorithmes : L'un listant les diviseurs entiers d'un nombre entier naturel non nul. L'autre, précisant si un entier naturel est premier ou non.

Situation 32 : Nombres parfaits
Réaliser un algorithme qui, pour un entier naturel donné précise s'il est parfait, abondant ou déficient.

Situation 33 : Algorithme d'Euclide
Réaliser sous tableur l'algorithme d'Euclide de deux entiers naturels non nuls donnés.

Situation 34 : Décomposition en facteurs premiers.
Réaliser un algorithme donnant la décomposition en facteurs premiers d'un entier supérieur ou égal à 2 donné.

Situation 35 : Par récurrence...
Soit n un entier naturel. On considère les deux propriétés dépendant de n, $\mathcal{P}_n$: "$4^n - 1$ est multiple de 3" et $\mathcal{Q}_n$: "$4^n + 1$ est multiple de 3". Ces deux propriétés, sont-elles :

i. héréditaires ?

ii. vraies pour tout entier naturel n ? Vraies, à partir d'un certain rang n ? On ne peut pas savoir pour l'une des deux ?

Situation 36 : Equations.
Au restaurant le Cours carré à Rennes, on propose deux menus, l'un à 27€ l'autre à 37€. À la fin de son service, la recette s'élève à 1000€. On se demande combien de repas de chaque sorte a-t-il été servi ? Répondre à cette question, notamment en ayant recours à la mise en œuvre d'un algorithme.

Situation 37 : La parabole de *Matiiassevitch*
On considère $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = x^2$, m et n des entiers supérieurs ou égaux à 2 et les deux droites joignant les deux points de $\mathcal{P}$, d'une part d'abscisse $-m$ et n et d'autre part d'abscisses m et $-n$.
À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, représenter $\mathcal{P}$ ainsi que les deux droites lorsque les entiers m et n varient. Quelles sont les ordonnées entières de l'axe à ne pas avoir été criblées par les droites ?

IV. Suites numériques (TICE)

Situation 41 : Étude d'une suite I
On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 5 \end{cases}$$

Programmer (à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur) les premiers termes de cette suite. Conjecturer le comportement de cette suite et le prouver finalement. Et dans le cas où la suite est convergente, on déterminera sa limite. Que devient u_n si $u_0 = a,\ (a \neq 4)$?

Situation 42 : Étude d'une suite II
On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2^n} \end{cases}$$

Programmer (à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur) les premiers termes de cette suite. Conjecturer le comportement de cette suite et le prouver finalement. Et dans le cas où la suite est convergente, on déterminera sa limite.

Situation 43 : Étude d'une suite arithmético-géométrique.
Pour un journal, on considère que le nombre de nouveaux abonnés chaque année est de 30000 et que le taux de réabonnement d'une année sur l'autre est de 85%. On note a_n le nombre d'abonnés de l'année $(2011 + n)$.
Donner une définition par récurrence de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$. Représenter cette suite, à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel, étudier la suite.
Interpréter le comportement de la suite dans le contexte de l'énoncé et discuter suivant les paramètres de cette suite, toujours dans le même contexte.

Situation 44 : Étude d'une suite récurrente
On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a,\ \ a \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = u_n(2 - u_n) \end{cases}$$

Programmer (à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur) les premiers termes de cette suite. Conjecturer le comportement de cette suite et le prouver finalement. Et dans le cas où la suite est convergente, on déterminera sa limite.

Situation 45 : Étude d'une suite récurrente d'ordre 2
Soit $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = a,\ \ a \in \mathbb{R} \\ u_{n+2} = \alpha u_{n+1} - (\alpha - 1)u_n \end{cases}$$

À l'aide d'un logiciel de calcul formel, conjecturer le comportement des suites :

$$(u_{n+1} - u_n)_{n\geq 0} \text{ et } (u_{n+1} - (\alpha - 1)u_n)_{n\geq 0}$$

Prouver ces conjectures puis en déduire une expression explicite de la suite (u_n), ainsi que son comportement asymptotique.

Situation 46 : Approximation d'un réel
On pose : $A = 38,\overline{63}$ … avec une infinité de périodes.
On considère pour n entier supérieur ou égal à 1, la suite numérique de terme général $u_n = 38{,}63 \ldots 63$, avec n périodes dans la partie décimale.
À partir de l'étude de la suite (u_n), donner un sens à l'écriture $A = 38,\overline{63}$ … avec une infinité de périodes, puis présenter un algorithme simple permettant, sous tableur, de retrouver, à partir de l'écriture fractionnaire, l'écriture décimale illimitée de A.

Situations basiques d'exercices dans différents thèmes (et utilisant le plus souvent les TICE)

V. Études de fonctions (TICE)

<u>Situation 51 :</u> …avec des carrés
n est un entier supérieur ou égal à 1. On considère n réels $x_1, \dots, x_n$ et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x)^2$
Cette fonction admet-elle, sur $\mathbb{R}$, un minimum ? un minimum ?
Illustrer cela graphiquement à l'aide d'un logiciel. Quelle autre interprétation peut-on en faire ?

<u>Situation 52 :</u> …avec des valeurs absolues
n est un entier supérieur ou égal à 1. On considère n réels $x_1, \dots, x_n$ et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sum_{i=1}^{n}|x_i - x|$
Cette fonction est elle continue sur $\mathbb{R}$? Caractériser sa représentation graphique.
Cette fonction admet-elle, sur $\mathbb{R}$, un minimum ? un minimum ?
Illustrer cela graphiquement à l'aide d'un logiciel. Quelle autre interprétation peut-on en faire ?

<u>Situation 53 :</u> fonctions convexes I
Soit f une fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) \geq 0$. Démontrer que $\mathcal{C}_f$, la courbe représentative de la fonction f, est au dessus de toutes ses tangentes.

<u>Situation 54 :</u> fonctions convexes II
Démontrer l'inégalité de *Jensen* : Soit f une fonction convexe définie dur un intervalle I, n un entier supérieur ou égal à 1, n réels $x_1, \dots, x_n$ et n réels positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que : $\Sigma\lambda_i = 1$. Alors : $f(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$. En déduire que la moyenne arithmétique de n réels est supérieure ou égale à la moyenne géométrique de ces mêmes réels.

<u>Situation 55 :</u> Représentation graphique et variations : Le marcheur
Dans un manuel scolaire de classe de Terminale S on trouve l'énigme suivante :
« Un marcheur a parcouru 10 km en en une heure. Existe-t-il un intervalle d'une demi heure pendant lequel il a parcouru exactement 5 km. ? »

<u>Situation 56 :</u> Dichotomie
Présenter sur tableur le principe de la Dichotomie pour une fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle $[a; b]$. Appliquer cette méthode à la résolution de l'équation $x^3 = 2$.

<u>Situation 57 :</u> Bijections réciproques
- On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Démontrer que le symétrique du point M de coordonnées $(a; b)$ par la réflexion d'axe d'équation « $y = x$ » est le point de coordonnées $(b; a)$.
- Soit f une fonction bijective d'un intervalle I dans un intervalle J et f^{-1} sa bijection réciproque. Montrer que les courbes représentatives de ces deux fonctions sont symétriques par rapport à la droite d'équation « $y = x$ ».

<u>Situation 58 :</u> Point fixe
- Montrer qu'une fonction définie et continue sur un intervalle $[a; b]$ et à valeurs dans l'intervalle $[a; b]$ possède au moins un point fixe.
- Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[0; +\infty[$ à valeurs dans $[0; +\infty[$ telle que $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = l$, avec $l \in [0; 1[$. Représenter graphiquement une ou plusieurs fonction répondant à cette définition, puis montrer qu'elle admet au moins un point fixe.

Situations basiques d'exercices dans différents thèmes (et utilisant le plus souvent les TICE)

Situation 59 : Dérivabilité

Les fonctions suivantes sont-elles dérivables en a :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = |2x^2 - 3x + 1|$, en $a = 1$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & si\ x \geq 0 \\ -\sqrt{-x}, & si\ x < 0 \end{cases}$, en $a = 0$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x}, & si\ x \neq 0 \\ 0, & si\ x = 0 \end{cases}$, en $a = 0$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & si\ x \neq 0 \\ 0, & si\ x = 0 \end{cases}$, en $a = 0$
5. $\forall x \in]-1; 1[, f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, en $a = -1$

Situation 510 : Équation différentielle

On donne l'équation $y' = y$ d'inconnue y où y' la dérivée première de y. On admet que cette équation admet une solution f telle que $f(0) = 1$.

Montrer l'unicité de la fonction f, qu'elle ne s'annule pas, qu'elle est strictement croissante.

Montrer que, pour tout x réel, $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$.En déduire les limites de la fonction f.

VI. Nombres complexes (TICE)

Situation 61 : …j !

On définit le nombre complexe $j = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

Montrer que : $1 + j + j^2 = 0$ et $j^3 = 1$

Soit a, b et c trois nombres complexes, affixes respectives des points A, B et C. Montrer que le triangle ABC est équilatéral direct si, et seulement si, $a + bj + cj^2 = 0$

À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique illustrer cette propriété.

Situation 62 : droite d'Euler

On se donne trois points non alignés A, B et C du plan et le triangle $\mathcal{T}$ de sommets A, B et C. Montrer, à l'aide de l'outils des nombres complexes que les hauteurs de $\mathcal{T}$ sont concourantes en un point H, aligné avec O, le centre du cercle circonscrit et G son centre de gravité.

Situation 63 : Ensemble de points

Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |z - 1|$

Situation 64 : Équation de degré 2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^2 - (2\cos\theta)z + 1 = 0$, θ un nombre réel.

Situation 65 : Équation de degré …

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $(z + 1)^n - (z - 1)^n = 0$, n étant un entier supérieur ou égal à 2.

Situation 66 : Napoléon

Démontrer le Théorème de Napoléon, en utilisant l'outil des nombres complexes.

Situation 67 : quadrilatère de *Varignon*

A_1, A_2, A_3 et A_4 sont quatre points du plan d'abscisses respectives a_1, a_2, a_3 et a_4 fixés.
Résoudre le système d'inconnues z_1, z_2, z_3 et z_4 suivant :

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = a_1 \\ z_2 + z_3 = a_2 \\ z_3 + z_4 = a_3 \\ z_1 + z_4 = a_4 \end{cases}$$

Interpréter les solutions de ce système à l'aide d'un logiciel de géométrie **dynamique**.

VII. Configurations (TICE)

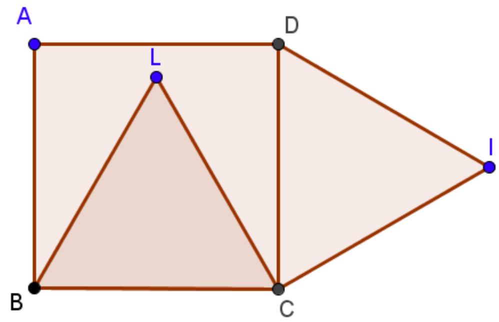
Dans chacune des situations suivantes, on indique les données ainsi qu'un but possible. Vous, vous devez :

- proposer au moins deux énoncés (associés à (au moins) deux méthodes différentes) permettant à un élève de résoudre l'exercice.
- placer chacun de vos énoncés à un (ou plusieurs) niveau(x) d'enseignement, en fonction des savoirs et méthodes nécessaires que vous préciserez.
- utiliser un logiciel de géométrie (dynamique), pour reconstruire la figure, puis expliquer en quoi le recours à ce type de logiciel peut être pertinent du point de vue de l'enseignant qui souhaiterait exploiter cette situation en classe.

Situation n°71 :

$ABCD$ est un carré, BCL et DCI sont des triangles équilatéraux, tous de même sens (disons direct).

But : Montrer l'alignement des points A, L et I.

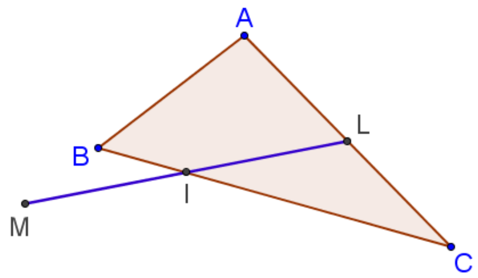


Situation n°72 :

ABC est un triangle quelconque, M le symétrique du milieu du segment $[AB]$ par rapport au point B, et L le milieu du segment $[BC]$. On note alors I le point d'intersection des droites (ML) et (BC).

But : Préciser la position du point I sur chacun des segments $[ML]$ et $[BC]$.

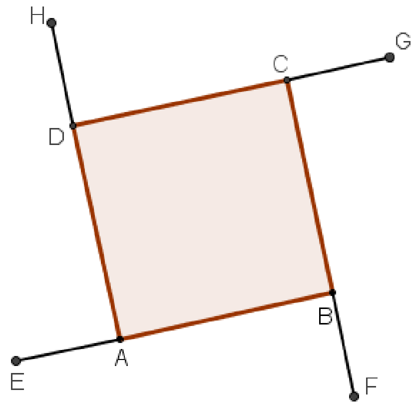
Situations basiques d'exercices dans différents thèmes (et utilisant le plus souvent les TICE)



Situation n°73 :

$ABCD$ est un carré. On prolonge ses côtés par quatre segments de même longueur et d'extrémités E, F, G et H, comme indiqué ci-dessous.

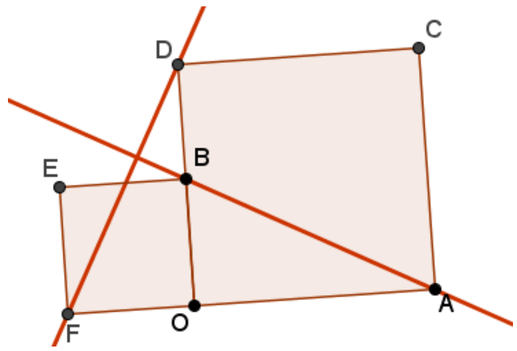
But : Montrer que le quadrilatère $EFGH$ est un carré de même centre que $ABCD$.



Situation n°74 :

$OACD$ et $OBEF$ sont deux carrés de mêmes sens tels que B appartient à la demi droite $[OD)$.

But : Position des droites (AB) et (FD).

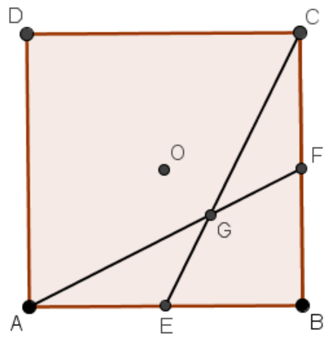


Situation n°75 :

$ABCD$ est un carré de centre O, Eet F les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$ et G le point d'intersection des droites (AF) et (CE).

But : Alignement des points B, G, O et D.

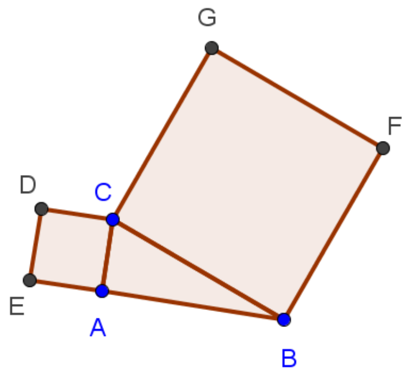
Situations basiques d'exercices dans différents thèmes (et utilisant le plus souvent les TICE)



<u>Situation n°76 :</u>

$ACDE$ et $BFGC$ sont tous les deux des carrés de même sens que le triangle ABC rectangles en A.

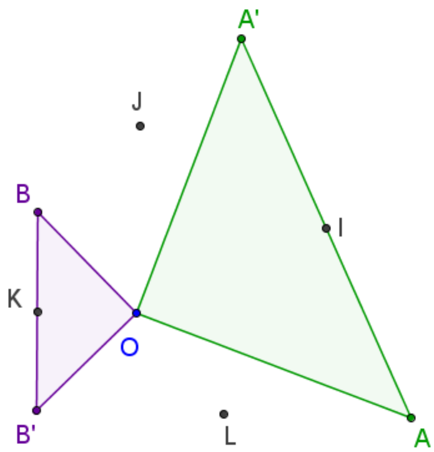
But : Propriétés sur les segments $[BD]$ et $[AG]$.



<u>Situation n°77 :</u>

OAA' et OBB' sont deux triangles rectangles isocèles en O et de même sens. I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments $[AA']$, $[A'B]$, $[BB']$ et $[B'A']$

But : Propriétés sur les segments $[OJ]$ et $[BA]$, et nature du quadrilatère $IJKL$.

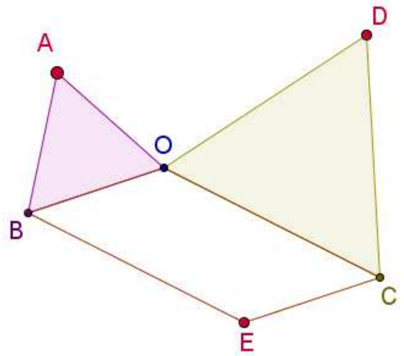


<u>Situation n°78 :</u>

Les triangles OAB et OCD sont équilatéraux de mêmes sens (disons directs), et le point E est, le quatrième sommet du parallélogramme $OEBC$.

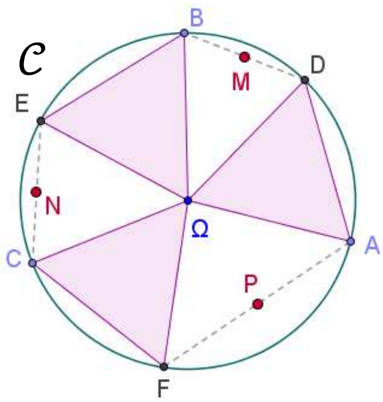
But : Nature du triangle AED.

Situations basiques d'exercices dans différents thèmes (et utilisant le plus souvent les TICE)



Situation n°79 :

Les points A, B, C, D, E et F sont sur le cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω, de sorte que les trois angles orientés $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}), (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OE})$ et $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OF})$ ont pour mesure en radian $\frac{\pi}{3}$, modulo 2π. Les points M, N et P sont, quant à eux, les milieux respectifs des segments $[AF]$, $[BD]$ et $[CE]$.



Bibliographie :
Manuels scolaires de lycée ;
Sujets d'épreuve d'Oral 2 du CAPES