

Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

Notations

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels.

$\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels non nuls.

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.

$\mathbb{R}^*$ désigne l'ensemble des nombres réels non nuls.

$\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.

Problème 1 : Vrai-Faux

Pour chacun des items suivants, préciser si l'assertion finale est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée. Une réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

Calculs dans $\mathbb{R}$

1. Soient x et y deux nombres réels tels que $2 \leq x \leq 6$ et $3 \leq y \leq 4$.
On a : $-1 \leq x - y \leq 2$.
2. La cotisation annuelle d'une assurance automobile a augmenté de 35% de sa valeur initiale en dix ans.
Le taux d'évolution annuel moyen de la cotisation pendant cette période est de 3,5%.
3. On considère le polynôme P donné par $P(X) = 2X^3 + 5X^2 - X - 6$.
Le polynôme P peut être factorisé dans $\mathbb{R}[X]$ par $(X - 1)$ et $(X - 2)$.
4. Soient a, b, c trois nombres entiers naturels non nuls, distincts deux à deux.
La somme des inverses de ces trois nombres n'est pas un nombre décimal.

Analyse réelle

5. Toute suite numérique réelle convergente est bornée.
6. La fonction $f: x \mapsto 2^x$ est définie, dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction f' définie, pour tout réel x , par $f'(x) = x2^{x-1}$.
7. Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout n , par appartenant à $\mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}$.
La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
8. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x|x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
9. Soit la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, par $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$.
La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
10. Soit une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On suppose que la fonction f est paire.
La fonction dérivée de la fonction f est impaire.

11. Soit une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que la fonction f est paire. Toute primitive de la fonction f est impaire.
12. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2}$. On note F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. La fonction F est convexe sur $\mathbb{R}$.
13. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x + \ln|e^x - 1|$.
L'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions réelles.

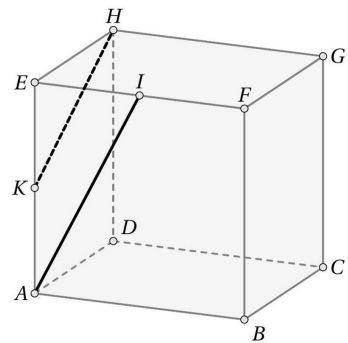
Arithmétique

14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si n est un nombre premier alors, $n! + 1$ est premier.
15. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $n(n^2 + 5)$ est divisible par 3.
16. Soit n un entier naturel non nul qui vérifie $\binom{n}{2} - \binom{n}{1} = 9$.
L'entier n est multiple de 3.

Géométrie et nombres complexes

17. Dans un espace affine euclidien de dimension 3, muni d'un repère cartésien orthonormé, on considère les deux plans d'équations cartésiennes suivantes
 $\mathcal{P}_1 : x - y - z = 2, \quad \mathcal{P}_2 : 3x - y + z = 4$.
Ces plans sont sécants selon la droite passant par le point $A(1, -1, 0)$, dirigée par le vecteur $\vec{v}$ de composantes $(1, 2, -1)$.

18. Dans un espace affine euclidien de dimension 3, on considère un pavé droit $ABCDEFGH$. Le point I est le milieu du segment $[EF]$ et le point K est le milieu du segment $[AE]$, comme sur l'illustration ci-contre.
Les droites (AI) et (KH) sont parallèles.



19. Dans le plan affine euclidien, on considère deux points distincts Ω et Ω' . Soit k un réel non nul et différent de 1.
La composée de l'homothétie de centre Ω et de rapport k et de l'homothétie de centre Ω' et de rapport $\frac{1}{k}$ est l'identité du plan.
20. Soit $b \in \mathbb{C}$. On considère la transformation du plan complexe qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = -z + b$.
Cette transformation est une symétrie centrale.
21. Soient z et z' deux nombres complexes.
La contraposée de la proposition « Si les nombres z et z' sont réels alors le produit zz' est réel » est « Si le produit zz' n'est pas réel alors z et z' ne sont pas des nombres réels ».

Dénombrement et probabilités

- 22.** On dispose d'un sac contenant des jetons indiscernables au toucher : cinq jetons rouges, portant les numéros de 1 à 5, et quatre jetons verts, portant les numéros 1 à 4. Un tirage consiste à piocher dans le sac 2 jetons simultanément.
Il y a 10 tirages différents avec exactement un jeton rouge et exactement un jeton portant le numéro 2.
- 23.** On repartit quatre boules numérotées de 1 à 4 dans trois urnes numérotées de 1 à 3. Une urne peut donc contenir plusieurs boules.
Il y a 3×2^4 façons de disposer les boules de sorte qu'au moins une urne soit vide.
- 24.** Une urne opaque contient un jeton vert et un jeton rouge. On tire au hasard un jeton de l'urne : si le jeton tiré est rouge on s'arrête, s'il est vert, on le remet dans l'urne avec un jeton vert supplémentaire et on effectue un nouveau tirage. Soit X la variable aléatoire qui donne le rang d'obtention du jeton rouge.
 $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = \frac{1}{n(n+1)}.$

Algèbre linéaire

- 25.** Soit A la matrice 2×2 à coefficients réels, donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, A^n = 2^{n-1}A.$
- 26.** Soient A et B deux matrices symétriques carrées à coefficients réels.
Le produit AB est une matrice symétrique.

Problème 2 : calcul et géométrie

L'objet de ce problème est d'étudier des situations faisant intervenir des interactions entre calcul et géométrie.

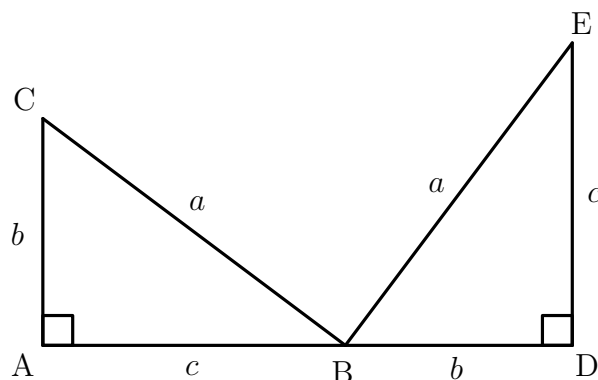
I. Autour du triangle rectangle

A. Une démonstration du théorème de Pythagore

On se propose de démontrer le théorème de Pythagore en suivant une méthode géométrique attribuée à James A. Garfield⁽¹⁾.

On considère un triangle ABC rectangle en A et on pose $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$. On construit un triangle DEB ayant les mêmes dimensions que ABC et tel que les points A, B et D soient alignés comme sur la figure ci-dessous.

(1). James A. Garfield (1831–1881), 20e président des États-Unis.



1. Démontrer que les droites (BC) et (BE) sont perpendiculaires.
2. Justifier que le quadrilatère ADEC est un trapèze.
3. Calculer de deux façons différentes l'aire du trapèze ADEC et conclure.

B. Irrationalité de $\sqrt{2}$

L'objectif de cette partie est de démontrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$ en retrouvant une égalité entre deux fractions avec un raisonnement géométrique dû à Tom M. Apostol⁽²⁾. Pour cela, on suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel et on l'écrit sous forme d'une fraction irréductible $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ avec $(a; b) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

4. Justifier l'encadrement $1 < \sqrt{2} < 2$.

5. Démontrer que $\frac{a}{b} = \frac{2b-a}{a-b}$.

On considère un triangle PQR rectangle et isocèle en P tel que $PQ = PR = b$. On note S le point de [QR] tel que $RP = RS$ et T le point d'intersection de [PQ] avec la perpendiculaire à (QR) passant par S.

6. Faire une figure.
7. Démontrer que $QR = a$.
8. Démontrer que le triangle QST est rectangle isocèle en S.
9. Démontrer que $\frac{TQ}{SQ} = \frac{2b-a}{a-b}$.
10. Retrouver l'égalité de la question 5. et conclure.

II. Autour du triangle équilatéral

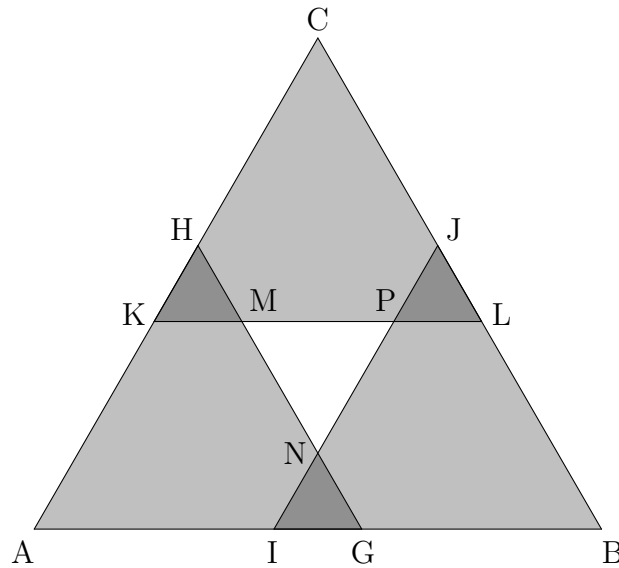
A. Irrationalité de $\sqrt{3}$

L'objectif de cette partie est de démontrer l'irrationalité de $\sqrt{3}$. Pour cela, on suppose que $\sqrt{3}$ est rationnel et on l'écrit sous forme irréductible $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ avec $(a; b) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

11. Vérifier que $(2a - 3b) = \sqrt{3}(2b - a)$.

(2). Tom M. Apostol (1923–2016), mathématicien américain.

On considère un triangle équilatéral ABC dont le côté mesure a et trois triangles équilatéraux AGH , IBJ et KLC dont les côtés mesurent b comme sur la figure ci-dessous.



12. À partir de la formule de l'aire d'un triangle, établir l'expression de l'aire d'un triangle équilatéral en fonction de la longueur de ses côtés.
13. Démontrer que l'aire du triangle ABC est égale au triple de l'aire du triangle AGH .
14. Justifier que $1 < \sqrt{3} < 2$ et en déduire que les triangles AGH , IBJ et KLC se recouvrent comme sur la figure ci-dessus.
Ils forment ainsi quatre nouveaux triangles IGN , KMH , PLJ et MNP .
15. Démontrer que ces quatre triangles sont équilatéraux.
16. Calculer les longueurs des côtés de ces quatre triangles équilatéraux.
17. Démontrer que l'aire du triangle MNP est égale au triple de l'aire du triangle KMH . On pourra s'appuyer sur la question 13. sans chercher à déterminer l'expression de ces aires en fonction de a et b .
18. Retrouver l'égalité de la question 11. et conclure.

B. Théorème de Lucas

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

19. On suppose que A , B et C sont les sommets d'un triangle équilatéral direct (sommets nommés dans le sens trigonométrique). On note z_A , z_B et z_C les affixes respectives des points A , B et C .
Justifier que $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.
20. En utilisant l'irrationalité de $\sqrt{3}$, déduire de la question précédente le théorème de Lucas⁽³⁾ : trois points distincts du plan à coordonnées rationnelles ne sont jamais les sommets d'un triangle équilatéral.

(3). Édouard Lucas (1842–1891), mathématicien français.

III. Irrationalité de e par la méthode de Sondow

Dans cette partie, on admet qu'il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. On appelle cette fonction, fonction exponentielle et on la note $\exp$. Aucune autre propriété de la fonction exponentielle n'est supposée connue. On pose $e = \exp(1)$.

- 21.** **a.** En étudiant la fonction $\varphi : x \mapsto \exp(x) \exp(-x)$ définie sur $\mathbb{R}$, démontrer que, pour tout réel x , $\exp(x) \neq 0$.
- b.** En déduire que, pour tout réel x , $\exp(x) > 0$ puis que la fonction $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- 22.** On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \exp(t) dt.$$

- a.** Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < I_n < \frac{e}{(n+1)!}$.
- b.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer I_{n+1} en fonction de n et de I_n .
- c.** Déduire de la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e = S_n + I_n$.
- d.** Conclure de ce qui précède que (S_n) converge vers e .
- 23.** **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier $k \geq 4$, $k! > 2^k$.
- b.** Calculer I_1 et I_2 .
- c.** Déduire du calcul de I_2 et de la question **22a.** que $e < 3$.
- d.** Déduire des questions précédentes que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n < \frac{1}{n!}$.
- e.** Déterminer le plus petit entier naturel k , tel que $2^{-k} < 10^{-3}$.
- f.** Déterminer un nombre rationnel r tel que $|e - r| < 10^{-3}$. On pourra s'appuyer sur les questions **23a.** et **23e.** En déduire une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de e .
- g.** En utilisant la suite (S_n) , écrire en langage Python une fonction `approximation` telle que, pour tout entier naturel m , `approximation(m)` renvoie une valeur approchée de e à 10^{-m} près. On pourra utiliser la fonction `factorial` (qui renvoie $n!$ pour `factorial(n)`) mais on ne devra pas utiliser la valeur de e fournie par le langage Python.
- 24.** On se propose de démontrer que le nombre e est irrationnel en suivant une méthode géométrique.
- On considère la suite d'intervalle $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$J_n =]S_n; S_n + \frac{1}{n!}[.$$

On a donc $J_1 =]2; 3[$.

- a.** En prenant comme unité 12 cm et sans déterminer les extrémités des intervalles, représenter, l'un en dessous de l'autre, J_1 , J_2 , J_3 et J_4 .

- b. Justifier que $J_2 = \left] \frac{5}{2!}; \frac{6}{2!} \right[$, $J_3 = \left] \frac{16}{3!}; \frac{17}{3!} \right[$ et $J_4 = \left] \frac{65}{4!}; \frac{66}{4!} \right[$.
- c. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J_{n+1} \subset J_n$.
- d. En déduire que $e \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} J_n$.
- e. Soit $k \in \mathbb{N}$. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{k}{n!} \notin J_n$.
- f. Démontrer que si e est rationnel alors il peut s'écrire $e = \frac{p}{q!}$ avec p et q entiers naturels non nuls et conclure.

IV. Polygones à angles rationnels

On dit qu'un angle est rationnel s'il admet une mesure en radian de la forme $r\pi$ où $r \in \mathbb{Q}$.

Le but de cette partie est d'établir certaines propriétés des polygones ayant des angles rationnels.

A. Un premier exemple

On s'intéresse au problème suivant : On cherche à savoir si il existe un triangle rectangle dont les longueurs des côtés sont rationnelles et qui possède un angle dont une mesure en radian est $\frac{\pi}{18}$.

- 25.
 - a. Démontrer que, pour tout réel x , $\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$.
 - b. En déduire que $\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)$ est une racine du polynôme P défini par $P(X) = 8X^3 - 6X + 1$.
- 26.
 - a. Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto 8x^3 - 6x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$. On précisera les limites.
 - b. Justifier que le polynôme P possède 3 racines réelles α , β et γ telles que $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8} < \beta < \frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2} < \gamma < 1$.
- 27. On souhaite démontrer que les nombres α , β et γ sont irrationnels. Pour cela, on suppose que P admet une racine rationnelle $r = \frac{s}{t}$ écrite sous forme irréductible.
 - a. Soient a et b deux entiers premiers entre eux. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, a et b^k sont premiers entre eux.
 - b. Justifier que $8s^3 - 6st^2 + t^3 = 0$.
 - c. Dédurre des questions précédentes que $t \in \{-2; -1; 1; 2\}$.
 - d. Aboutir à une contradiction et conclure.
- 28. Existe-t-il un triangle rectangle dont les côtés ont des longueurs rationnelles et dont un angle mesure $\frac{\pi}{18}$?

B. Théorème de Niven

Le but de cette section est de démontrer le théorème de Niven ⁽⁴⁾ : si θ est un angle rationnel tel que $\cos(\theta)$ est rationnel alors $\cos(\theta) \in \left\{-1; -\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 1\right\}$.

29. On considère un polynôme P défini par $P(X) = \sum_{k=0}^d c_k X^k$ de degré $d \in \mathbb{N}^*$ et dont les coefficients c_k appartiennent à $\mathbb{Z}$. On suppose que P est unitaire (c'est-à-dire que $c_d = 1$) et que $r = \frac{s}{t}$ est une racine rationnelle non nulle de P écrite sous forme irréductible.

a. Justifier que $s^d = -t \sum_{k=0}^{d-1} c_k s^k t^{d-k-1}$.

b. En déduire que r est un entier. On pourra utiliser le résultat de la question **27a**.

30. Soit la suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} P_0(X) = 2, & P_1(X) = X \\ \forall n \in \mathbb{N}, & P_{n+2}(X) = XP_{n+1}(X) - P_n(X) \end{cases}.$$

a. Calculer $P_2(X)$, $P_3(X)$ et $P_4(X)$.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est un polynôme unitaire de degré n à coefficients entiers.

c. Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(2 \cos(x)) = 2 \cos(nx)$.

31. On considère un rationnel $r = \frac{s}{t}$ écrit sous forme irréductible.

a. Déterminer un polynôme unitaire Q à coefficients entiers tel que $Q(2 \cos(r\pi)) = 0$. On pourra utiliser le polynôme P_t défini dans la question précédente.

b. En déduire une démonstration du théorème de Niven. On pourra utiliser le résultat de la question **29b**.

C. Applications du théorème de Niven : triangles à côtés et angles rationnels

On considère un triangle (non aplati) ABC dont les trois côtés ont des longueurs rationnelles.

32. Démontrer que les cosinus des trois angles $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$ sont des nombres rationnels.

33. En déduire que si le triangle ABC possède trois angles rationnels alors le triangle ABC est équilatéral. On pourra utiliser le théorème de Niven.

(4). Ivan Niven (1915–1999), mathématicien américano-canadien.