Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

Notations.
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des entiers naturels non nuls.
$\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des nombres rationnels.
$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}_+^*$ désigne l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

Problème n° 1 : VRAI - FAUX

Pour chacune des assertions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse donnée. Toute réponse « vrai » ou « faux » non argumentée ne sera pas prise en compte.

I. Analyse

Ici $[a;b]$ désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $a < b$.

1. Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ n'est pas paire si, et seulement si, pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(x) \neq f(-x)$.

2. Soit une fonction f définie et continue sur $[a;b]$ et à valeurs dans $[a;b]$.
L'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a;b]$.

3. Soient deux fonctions f et g définies et continues sur $[a;b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Si $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b g(x)\,dx$, alors pour tout $x \in [a;b]$, on a $f(x) > g(x)$.

4. Si la valeur moyenne d'une fonction continue sur un intervalle est nulle, alors la fonction est nulle sur cet intervalle.

5. Les solutions de l'équation différentielle $y" - 3y' + 2y = 2$ sont les fonctions

$$x \longmapsto k\exp(2x) + 1$$

où k désigne un nombre réel quelconque.

6. La négation de l'assertion « toute suite réelle majorée converge » est « il existe des suites réelles minorées qui ne convergent pas ».

7. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = 1 - \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{7^2} - ... + \dfrac{1}{(-7)^n}$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un nombre réel strictement plus grand que 1.

8. Un cycliste parcourt 40 km la semaine 0. Il décide que, chaque semaine, il parcourra 5km de plus que la distance parcourue lors de la semaine précédente.
La fonction *seuil* présentée ci-dessous, écrite en langage Python, permet de déterminer le numéro de la semaine où la distance totale qu'il aura parcourue sera supérieure à un nombre n donné.

```
def seuil(n) :
    k=0
    u=40
    S=40
    while S<n :
        k=k+1
        S=S+u+5
    return k
```

II. Géométrie

9. Étant donnés trois points A, B et C du plan, la contraposée de l'assertion

$$ABC \text{ est un triangle rectangle en } A \Longrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$$

est

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Longrightarrow ABC \text{ est un triangle rectangle en } A.$$

10. On se place dans un plan vectoriel P muni d'un produit scalaire noté $(\, . \mid . \,)$ et d'une norme associée notée $|| \, . \, ||$. Soient x et y dans P tels que $||x|| = ||y||$.
Les vecteurs $x + y$ et $x - y$ sont orthogonaux.

11. On se place dans un plan vectoriel P muni d'un produit scalaire noté $(\, . \mid . \,)$.
Pour tous vecteurs x, y et z de P, on a $(x|z) = (y|z) \Longrightarrow x = y$.

12. Dans le plan affine euclidien muni d'un repère cartésien orthonormé, on considère les points $A(-4, 1), B(3, 0)$ et $C(5, 4)$.
La médiatrice de $[AC]$ a pour équation $x + y = 3$.

13. Dans le plan affine euclidien muni d'un repère cartésien orthonormé, l'ensemble des points d'affixe z tels que $|z - 2| = |z + 1|$ est réduit au point d'affixe $\frac{1}{2}$.

14. Dans le plan affine euclidien orienté muni d'un repère cartésien orthonormé direct d'origine O, on considère les points A et B d'affixes respectives $\sqrt{3} - \mathrm{i}$ et $\sqrt{3} + \mathrm{i}$.
L'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ mesure $\dfrac{\pi}{3}$ modulo 2π.

15. Dans l'espace affine euclidien, muni d'un repère cartésien orthonormé, le plan P d'équation $x - 2y + 3z = -5$ et la droite D de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -t \\ z = -1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ sont perpendiculaires.

III. Matrices

16. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, espace des matrices à coefficients réels à 2 lignes et 2 colonnes.

17. Si A et B sont des matrices carrées à n lignes et n colonnes telles que $AB = 0$, alors A ou B n'est pas inversible.

IV. Pourcentages

18. En 2019, le prix du tabac a augmenté de 12%, en 2020 de 16%, en 2021 de 7%.
L'augmentation du prix du tabac de 2019 à 2021 a été de 35%.

19. Armelle et Boris ne suivent pas les mêmes enseignements. La semaine 1, Armelle a réussi 50% des exercices qu'elle a traités et Boris 90% des exercices qu'il a traités. La semaine 2, Armelle a réussi 20% des exercices qu'elle a traités et Boris 40% des exercices qu'il a traités.
Sur l'ensemble de la quinzaine, Boris a nécessairement réussi un plus grand pourcentage d'exercices traités qu'Armelle.

V. Arithmétique

20. Soit n un entier naturel.
$n^3 - n$ est pair.

21. Soient un entier relatif x et un entier naturel non nul n.
Si $x^2 \equiv 9$ $[n]$ alors $x \equiv 3$ $[n]$ ou $x \equiv -3$ $[n]$.

VI. Dénombrement

22. Le nombre de parties d'un ensemble à 10 éléments est égal à 100.

23. Étant donné un entier naturel n supérieur ou égal à 3, on trace dans un plan n droites de sorte qu'il n'existe pas parmi elles deux droites parallèles ni trois droites concourantes.
Le nombre de triangles ainsi obtenus est égal à $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

VII. Probabilités

24. On choisit un numéro entre 1 et 6. On lance un dé équilibré à 6 faces jusqu'à l'obtention du numéro choisi.
La probabilité de devoir effectuer au moins 3 lancers pour obtenir le numéro choisi est $\dfrac{5^2}{6^2}$.

25. Soient A et B deux événements de probabilité non nulle dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
A et B sont indépendants si et seulement si $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Problème n° 2 : équations fonctionnelles

I. Quelques résultats classiques

Dans cette partie, qui traite de points élémentaires, un soin particulier devra être apporté à la rigueur et à la précision des arguments donnés.

1. Dérivabilité

Soient un intervalle I de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point, une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et un élément a de I.

a. Donner une définition de l'assertion «f est dérivable en a».

b. On suppose que f est dérivable en a et on note $f'(a)$ le nombre dérivé de f en a. Démontrer que f admet un développement limité d'ordre 1 en a, qui est

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + g(x)$$

où g est une fonction négligeable devant $x \mapsto x - a$ en a. *On pourra considérer la fonction* $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $\varepsilon(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a)$ *si* $x \neq a$ *et* $\varepsilon(a) = 0$.

c. **i.** Démontrer que si f est dérivable en a alors f est continue en a.

ii. Donner, sans démonstration, un contre-exemple pour l'assertion réciproque.

d. Soit $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Démontrer que si f et g sont dérivables en a alors fg l'est aussi. Expliciter $(fg)'(a)$.

e. Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset J$ et une fonction $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$. Démontrer que si f est dérivable en a et si g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a. Expliciter $(g \circ f)'(a)$.

2. La fonction logarithme népérien

On appelle fonction logarithme népérien l'unique primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ s'annulant en 1, on la note ln.

Ainsi ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $\ln(1) = 0$.

L'objectif de cette question 2. est de démontrer des propriétés élémentaires du logarithme népérien, dont la plupart figurent au programme de Terminale. À ce stade, ces propriétés sont supposées ne pas encore avoir été établies. De même, la fonction exponentielle de base e *n'est pas supposée avoir été introduite et ne pourra être utilisée.*

a. Démontrer que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on a $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.
On pourra considérer, pour $y \in \mathbb{R}_+^*$ *fixé, la fonction* φ *définie sur* $\mathbb{R}_+^*$ *par*

$$\varphi(x) = \ln(xy) - \ln(x) - \ln(y).$$

b. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\ln(x^n) = n\ln(x)$ et $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.

c. Le but de cette question est de déterminer toutes les fonctions $g : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on a $g(xy) = g(x) + g(y)$.
Soit g une telle fonction.

i. Déterminer $g(1)$.

ii. Démontrer que, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on a $g'(xy) = \dfrac{g'(x)}{y}$.

iii. En déduire qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, on a $g'(y) = \dfrac{c}{y}$.

iv. Déterminer l'ensemble des fonctions g dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ qui sont solutions de l'équation fonctionnelle $g(xy) = g(x) + g(y)$.

d. Démontrer que ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

e. Soit $A \in \mathbb{R}$. Après avoir vérifié qu'il existe n dans $\mathbb{N}^*$ tel que $n \geqslant \dfrac{A}{\ln 2}$, démontrer que, pour tout nombre réel x tel que $x \geqslant 2^n$, $\ln(x) \geqslant A$.

f. Expliciter les limites de ln en $+\infty$ et en 0^+.

g. Démontrer que ln réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

h. Démontrer que pour tout $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on a

$$\ln\left(\frac{a+b}{4}\right) = \frac{\ln a + \ln b}{2} \iff a^2 + b^2 = 14ab$$

II. Première équation fonctionnelle de Cauchy

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ est additive sur $\mathbb{R}$ si, pour tous nombres réels x et y,

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

On se propose de déterminer, par deux méthodes différentes, l'ensemble des fonctions f additives et continues sur $\mathbb{R}$.

3. Résultats préliminaires

Soit f une fonction définie et additive sur $\mathbb{R}$.

a. Déterminer $f(0)$.

b. Démontrer que f est une fonction impaire.

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n et tout nombre réel x, $f(nx) = nf(x)$.

d. En déduire que, pour tout nombre rationnel r et tout nombre réel x, $f(rx) = rf(x)$.

e. Démontrer qu'il existe un nombre réel a tel que, pour tout nombre rationnel r, $f(r) = ar$.

4. Première méthode

Soit f une fonction additive et continue sur $\mathbb{R}$.
Déduire de la question **3.** qu'il existe un nombre réel a tel que, pour tout nombre réel x, on a $f(x) = ax$. Conclure.

5. Seconde méthode

Soit f une fonction additive et continue sur $\mathbb{R}$.

a. Après avoir justifié l'existence de ces intégrales, démontrer que, pour tout nombre réel x :

$$f(x) = \int_0^1 f(x + t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

b. Démontrer que, pour tout nombre réel x :

$$f(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

c. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer f'.

d. Conclure.

III. Restriction des hypothèses

On pourra, pour les questions suivantes, utiliser les résultats démontrés dans la question **3.** L'objectif de cette partie est d'examiner l'effet sur la conclusion de la partie **II** de trois restrictions de l'hypothèse de continuité des fonctions additives sur $\mathbb{R}$.

6. Continuité en un point

Soient un nombre réel x_0 et une fonction f additive sur $\mathbb{R}$ continue en x_0.

a. Démontrer que f est continue en 0.

b. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

c. Conclure.

7. Monotonie

Soit une fonction f additive et monotone sur $\mathbb{R}$.
Soit x_0 un nombre réel.

a. Justifier qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

i. pour tout entier naturel n, $(a_n, b_n) \in \mathbb{Q}^2$.

ii. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

iii. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = x_0$.

b. Démontrer que $f(x_0) = x_0 f(1)$.

c. Conclure.

8. Encadrement

Soient deux nombres réels α et β, avec $\alpha < \beta$, et une fonction f additive sur $\mathbb{R}$ et bornée sur $[\alpha;\beta]$.
Soit x un nombre réel.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, il existe un nombre rationnel r_n tel que $nx - r_n \in [\alpha;\beta]$.

b. On pose $f(1) = a$. Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$|f(nx - r_n)| \geqslant n\,|f(x) - ax| - |a|\,|nx - r_n|\,.$$

c. Conclure.

IV. D'autres équations fonctionnelles

9. Deuxième équation fonctionnelle de Cauchy

On se propose de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x+y) = f(x) \times f(y).$$

Soit f une telle fonction.

a. Démontrer que $f(0) = 1$ ou que f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

b. On suppose maintenant que f n'est pas la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

i. Démontrer que pour tout nombre réel x, on a $f(x) > 0$.

ii. Pour tout réel x, on pose $g(x) = \ln(f(x))$. Démontrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $g(x + y) = g(x) + g(y)$.

iii. En déduire qu'il existe un nombre réel a tel que, pour tout nombre réel x, $f(x) = \exp(ax)$ (où exp désigne la fonction exponentielle réciproque de la fonction logarithme népérien étudiée dans la partie **I**) et conclure.

10. Équation fonctionnelle de Jensen

On se propose de déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Soit f une telle fonction.

a. Exprimer la propriété vérifiée par les fonctions qui satisfont l'équation fonctionnelle de Jensen, à l'aide d'une phrase faisant intervenir la notion de *moyenne.*

b. Démontrer que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x + y) = f(x) + f(y) - f(0).$$

c. On pose $f(0) = b$. Pour tout nombre réel x, on pose $g(x) = f(x) - b$.
Déterminer l'équation fonctionnelle vérifiée par g et résoudre l'équation fonctionnelle de Jensen.

11. On se propose de déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f(x) = f\left(\frac{x^2 + 16}{2x}\right).$$

Soit f une telle fonction.

a. On considère les fonctions

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2+16}{2x} \end{array}$$

et

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) - x \end{array}$$

i. Dresser le tableau des variations de g, déterminer $g(4)$ et préciser les limites de g en 0^+ et en $+\infty$.

ii. Étudier le signe de la fonction h sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. i. Soient $x \in [4; +\infty[$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = x$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 16}{2u_n}$.
À l'aide de la question **a**, démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

ii. En déduire que, pour tout $x \in [4; +\infty[$, on a $f(x) = f(4)$.

c. Procéder de manière analogue à la question **b** pour démontrer que, pour tout x appartenant à $]0; 4[$, on a $f(x) = f(4)$.

d. Conclure.