Le sujet est composé :

- *des questions posées au candidat (pages 1 à 3) ;*
- *du dossier sur lequel portent ces questions (pages 4 à 9).*

La formulation des questions permet d'identifier la forme attendue de la réponse : annotation de copie, énoncé d'exercice, corrigé d'exercice, démonstration, etc. Lorsqu'une analyse ou un argumentaire est demandé, la réponse doit être précise et concise.

Partie 1 : fractions

Les questions sur ce thème se rapportent à la partie 1 du dossier (pages 4 et 5).

I - Analyse d'erreurs

1. *Élève 1* : indiquer l'annotation que l'on pourrait inscrire sur sa copie pour l'aider à prendre conscience de son erreur.

2. *Élève 2* : comment est-il arrivé à ce résultat ? Comment l'amener à critiquer son résultat pour instiller un doute ?

3. Dans un QCM, les réponses fausses proposées, appelées *distracteurs*, correspondent en général à des erreurs courantes. Préciser l'origine possible des distracteurs de l'exercice 1.

II – Éléments d'une séquence d'enseignement

1. À partir de la droite graduée de l'exercice 2, proposer quatre questions à l'attention des élèves permettant d'évaluer la mobilisation des compétences suivantes du programme :
   - utiliser diverses représentations d'un même nombre (écriture décimale ou fractionnaire, repérage sur une droite graduée) ;
   - passer d'une représentation d'un nombre à une autre.

2. Lorsqu'on introduit la multiplication des entiers à l'école primaire, il est courant de prendre appui sur des schémas. En se plaçant dans un cas simple, proposer de même une figure permettant d'expliquer l'origine de la propriété qui donne le produit de deux fractions.

3. En s'appuyant sur la définition du quotient $\frac{a}{b}$ donnée dans le dossier, établir l'égalité suivante, vraie pour tous les nombres a, b, c et d avec b et d non nuls.
$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$
On veillera à justifier chacune des étapes de la démonstration.

4. Dans le document ressource il est indiqué que la définition du quotient $\frac{a}{b}$ comme étant le nombre dont le produit par b vaut a n'est pas *d'accès facile*. Préciser la nature des difficultés que pourrait susciter cette définition chez des élèves et proposer brièvement une façon de la rendre accessible.

5. L’extrait d’ouvrage historique (la Disme) est un document parfois utilisé pour passer de l’écriture d’une fraction comme somme de fractions décimales à son écriture à virgule.
   5.1. Comment définir le sens des mots *primes* et *quartes* dans l’extrait ?
   5.2. Comment expliquer à des élèves que 7 ①12 ② et 8 ①2 ② « valent autant » ?
   5.3. L’écriture « 5 ⓪ 7 ② » risque de constituer un obstacle pour les élèves lors du passage à l’écriture à virgule. Expliciter cet obstacle et proposer une autre écriture susceptible de l'éviter.
   5.4. Donner deux arguments en faveur de l’exploitation de ce document historique avec une classe de collège.

III - Exercice à prise d’initiative

1. Dans la formulation de l’exercice 3, le mot « moins » apparaît avec deux sens différents. Proposer une modification de l’énoncé pour éviter le risque de confusion.

2. Résoudre l’exercice 3.

3. Un enseignant choisit de faire travailler les élèves par groupes de quatre sur cet exercice. Proposer deux modalités d’animation qu’il peut mettre en place pour que chaque élève s’engage dans cette recherche et bénéficie du travail en groupe.

4. Proposer deux critères permettant d’apprécier la réussite partielle d’un élève dans la résolution de cet exercice.

Partie 2 : géométrie repérée

Les questions sur ce thème se rapportent à la partie 2 du dossier (pages 6 à 9).

IV – Éléments d'une séquence d'enseignement

1. Après avoir défini la colinéarité de deux vecteurs, un enseignant propose les questions flash de l'exercice 4. Préciser pour chaque question de cet exercice les objectifs visés.

2. La définition du déterminant proposée dans le manuel nécessite-t-elle de se placer dans un repère orthonormé ? Justifier la réponse.

3.
   3.1. Rédiger une démonstration de la propriété « deux vecteurs du plan sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul ».

   3.2. Parmi les raisonnements suivants, identifier ceux qui sont utilisés dans la réponse à la question 3.1, en précisant à quel endroit de la démonstration ils interviennent : raisonnement par l'absurde, disjonction de cas, double implication, équivalence, raisonnement par contre-exemple.

4. En utilisant le déterminant de deux vecteurs, établir la forme générale d'une équation de droite comme cela pourrait être présenté devant une classe de seconde.

V - Analyse de ressources

1. Quelle est la notion commune mobilisée dans les trois exercices 5, 6 et 7 ?
   Comment qualifier chacun de ces exercices par rapport aux types de tâches mentionnés dans le préambule du programme de seconde ?

2.
   2.1. En quoi les exercices 8 et 9 peuvent-ils permettre aux élèves de comprendre l'utilité d'une démonstration mathématique ?
   2.2. Proposer, en justifiant ce choix, une autre situation qui réponde à cet objectif.
   2.3. Rédiger, à l'attention d'une classe de seconde, une correction de l'exercice 8 qui mobilise l'outil vectoriel.

3. Un enseignant envisage de proposer l'exercice 9 à une classe de terminale.
   En anticipant sur les initiatives à prendre et sur ce qui pourrait faire obstacle à sa résolution, proposer deux « coups de pouce » susceptibles d'aider des élèves qui en ont besoin.

VI - Analyse des productions d'élèves

1.
   1.1 Analyser les productions des groupes d'élèves pour l'exercice 10, au regard de la compétence *raisonner*.
   1.2 Quelles annotations pourraient figurer sur ces productions entre deux séances de travail, pour développer chez ces élèves la compétence *raisonner* ?

2. Proposer deux corrections différentes de l'exercice 10 telles qu'elles pourraient figurer dans un cahier d'élève de seconde. L'une des deux devra s'appuyer sur la production du groupe 1 et l'autre sur celle du groupe 2.

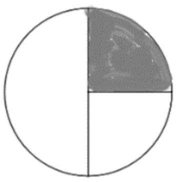
Dossier : partie 1

Document ressource

Extrait du document ressource du cycle 4 « Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes : les fractions » (MENJS, Eduscol, mars 2016)

Au cycle 4, on s'intéresse au quotient $\frac{a}{b}$ de deux nombres a et b, $b \neq 0$, quelconques, défini comme le nombre dont le produit par b vaut a. Le professeur prendra conscience que cette définition n'est pas d'accès facile, et pourra proposer aux élèves de chercher comment la reformuler.
La « vision-partage » de la fraction continue à être mobilisée. Le terme « vision-partage » est à comprendre au sens où, par exemple, la fraction $\frac{7}{4}$ évoque ce qui est obtenu en partageant l'unité en 4 parts égales et en reportant 7 de ces parts, ce qui correspond d'ailleurs à la lecture *sept quarts* ($\frac{7}{4}$ c'est 7 fois le quart de l'unité).
(…)
Progressivement, l'élève est amené à mobiliser la « vision-nombre » de la fraction pour résoudre des problèmes (…). Le terme « vision-nombre » est donc à comprendre au sens où, par exemple, le quotient $\frac{7}{4}$ est le nombre dont le produit par 4 vaut 7.

Productions d'élèves

Énoncé Quel dessin ferais-tu pour expliquer ce qu'est $\frac{1}{3}$? **Production de l'élève 1** 	*Énoncé* Calculer $\frac{1}{2} + \frac{2}{5}$ **Production de l'élève 2** $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{3}{7}$

Exercice 1 (QCM)

$\frac{1}{4}$ peut aussi s'écrire :

- ☐ 0,4
- ☐ 1,25
- ☐ 1,4
- ☐ 0,25

Exercice 2 (énoncé incomplet)

Extrait d'ouvrage historique

En 1585, le hollandais Simon Stévin publie La Theinde, traduit en français sous le titre La Disme. Le succès de cet écrit à travers toute l'Europe conduira à l'utilisation de l'écriture à virgule.

> Comme 3 ① 7 ② 5 ③9 ④, c'est à dire 3 Primes 7 Secondes 5 Tierces 9 Quartes et ainsi se pourrait procéder en infini. Mais pour dire de leur valeur, il est notoire que selon cette définition les dits nombres font $\frac{3}{10}\frac{7}{100}\frac{5}{1000}\frac{9}{10000}$, ensemble $\frac{3759}{10000}$. Semblablement 8 ⓪9 ①3 ② 9 ③ , valent 8 $\frac{9}{10}\frac{3}{100}\frac{9}{1000}$, et ensemble 8 $\frac{939}{1000}$ et ainsi d'autres semblables. Il faut aussi savoir que nous n'usons en la DISME d'aucun nombres rompus, aussi que le nombre de multitudes des signes, excepté ⓪, n'excède jamais le 9. Par exemple, nous n'écrivons pas 7 ①12 ② mais en leur lieu 8 ①2 ② , car ils valent autant.

Exercice 3

D'après le document ressource du cycle 4, Utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes : les fractions (MENJS, Eduscol, mars 2016)

Les $\frac{2}{5}$ d'un groupe de personnes ont au moins 50 ans et $\frac{1}{3}$ a moins de 20 ans.

Est-il possible que l'âge moyen de ce groupe soit de 40 ans ?

Dossier : partie 2

Programme

Extrait du programme de mathématiques de seconde générale et technologique (arrêté du 17 janvier 2019, MENE1901631A)

Diversité de l'activité de l'élève

La mise en œuvre du programme doit permettre aux élèves d'acquérir des connaissances, des méthodes et des démarches spécifiques.
La diversité des activités concerne aussi bien les contextes (internes aux mathématiques ou liés à des situations issues de la vie quotidienne ou d'autres disciplines) que les types de tâches proposées : « questions flash » pour favoriser l'acquisition d'automatismes, exercices d'application et d'entraînement pour stabiliser et consolider les connaissances, exercices et problèmes favorisant les prises d'initiatives, mises au point collectives d'une solution, productions d'écrits individuels ou collectifs, etc.

Document ressource

Extrait du document ressource « Les compétences mathématiques au lycée » (MENJS, Eduscol, novembre 2013)

Raisonner

Utiliser les notions de la logique élémentaire (conditions nécessaires ou suffisantes, équivalences, connecteurs) pour bâtir un raisonnement.

Différencier le statut des énoncés mis en jeu : définition, propriété, théorème démontré, théorème admis…

Utiliser différents types de raisonnement (par analyse et synthèse, par équivalence, par disjonction de cas, par l'absurde, par contraposée, par récurrence…).

Effectuer des inférences (inductives, déductives) pour obtenir de nouveaux résultats, conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture, prendre une décision.

Document ressource

Extrait de « La République à l'école » (MENJS, septembre 2021)

L'activité de l'élève dans la classe de mathématiques

Délivrer un savoir achevé et parfait ne suffit pas. Il s'agit que les élèves soient mis en activité de recherche, dans le cadre de la résolution des problèmes. C'est l'occasion pour eux d'explorer toute la richesse de la démarche mathématique : comprendre la question, la reformuler, se l'approprier ; émettre des hypothèses, faire des conjectures ; essayer, tâtonner ; définir des pistes de recherche ; accepter de se tromper ; échanger avec autrui, développer des arguments, écouter ceux des autres ; coopérer pour surmonter une difficulté ; constater qu'un problème peut admettre plusieurs solutions, qu'il peut y avoir plusieurs façons de démontrer un résultat. L'élève se convainc que vérifier une propriété sur quelques cas ne permet pas d'affirmer qu'elle est vraie dans tous les cas ; qu'une conjecture ayant toute l'apparence de la vérité peut s'avérer fausse ; ou qu'un résultat étonnant devient incontestable, car démontré.

Extraits d'un manuel

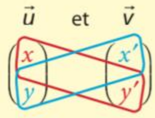
Math'x 2^de^, édition Didier

Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires *si et seulement si* l'un est le produit de l'autre par un réel.

Propriété et définition

Soit deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans une base du plan.



- Le nombre $xy' - x'y$ est appelé **déterminant** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et noté $\det(\vec{u}, \vec{v})$.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires *si et seulement si* leur déterminant est nul.

Propriété et définition (équation cartésienne)

Dans un repère du plan, toute droite d admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$.

Un point appartient à la droite d si et seulement si ses coordonnées vérifient cette équation. Cette équation est appelée **équation cartésienne** de la droite d.

Énoncés d'exercices

Exercice 4 (questions flash)

D'après le manuel Hyperbole seconde, édition Nathan et le document ressource « Raisonnement et démonstration 2^DE^ » (MENJS, Eduscol, août 2019)

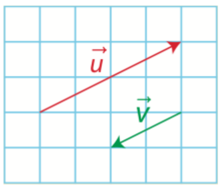
Question 1 : *Trois camarades affirment*

Jade : « $\vec{u} = -2\vec{v}$ »

Amanda : « $\vec{u} = 2\vec{v}$ »

Wallid : « $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{u}$ »

Qui a raison ?



Question 2 : *Les vecteurs* $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ *sont-ils colinéaires ?*

Question 3 : *Les vecteurs* $\vec{u}\begin{pmatrix} 8 \\ 13 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix} 13 \\ 21 \end{pmatrix}$ *sont-ils colinéaires ?*

Dans les trois exercices suivants, le plan est muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Exercice 5

Extrait du manuel Maths 2^de^ Magnard

68 **1.** Calculer les déterminants des vecteurs suivants.
2. Dire s'ils sont colinéaires.
3. S'ils sont colinéaires, trouver un coefficient de colinéarité.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ -4,5 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{s}\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{t}\begin{pmatrix} 14 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{r}\begin{pmatrix} 3 \\ 4,5 \end{pmatrix}$ **d)** $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ -4,5 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} -8 \\ 12 \end{pmatrix}$

e) $\vec{s}\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{m}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{7} \end{pmatrix}$ **f)** $\vec{m}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{7} \end{pmatrix}$ et $\vec{t}\begin{pmatrix} 14 \\ 4 \end{pmatrix}$

Exercice 6

Extrait du manuel Maths 2de Magnard

72 Dans chaque cas, dire si le point C appartient à la droite (AB).

a) A(2 ; 3), B(2 ; –1) et C(2 ; 7)

b) A(1 ; 4), B(–5 ; –4) et C(4 ; 8)

c) A(–3 ; 0), B(2 ; 3) et C(4 ; 4)

Exercice 7

Extrait du manuel Maths 2de Magnard

104 Coordonnée inconnue

On donne les points A(6 ; 3), B(–3 ; 0), C(5 ; 4) et D(–1 ; 1).

1. Montrer que les droites (OA) et (BC) sont parallèles.

2. Les points B, C et D sont-ils alignés ?

3. Déterminer y pour que le point M(25 ; y) appartienne à la droite (AB).

Exercice 8 : le paradoxe de Lewis Caroll

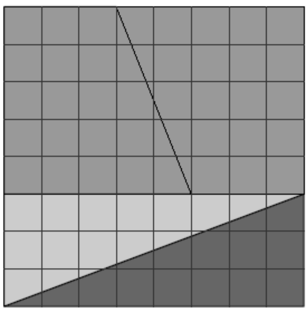


figure 1

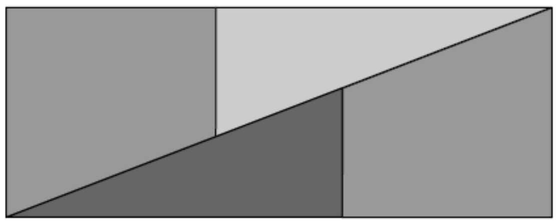


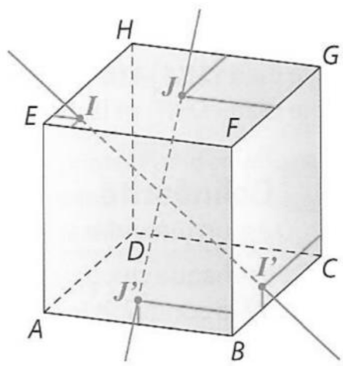
figure 2

En découpant le carré de la figure 1 et en repositionnant les morceaux on obtient la figure 2. Comparer les aires de ces deux figures. Que constate-ton ? Comment justifier ce constat ?

Exercice 9 : les aiguilles

Extrait du manuel Déclic édition Hachette

Un cube d'arête 8 cm est traversé par deux aiguilles suivant les droites (II') et (JJ').
I et J sont situés sur la face $EFGH$.
I est à 1 cm de (EH) et (EF).
J est à 4 cm de (HG) et (FG).
J' est un point de la face $ABFE$ situé à 1 cm de (AB) et à 4 cm de (BF). I' est un point de la face $BCGF$ situé à 1 cm de (BC) et à 5 cm de (CG).
Les deux aiguilles se touchent-elles ?



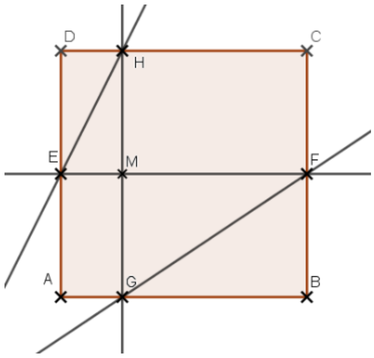
Exercice 10

ABCD est un carré. On place un point M à l'intérieur du carré.

La droite parallèle à (AB) passant par M, coupe [AD] en E et [BC] en F.

La droite parallèle à (AD) passant par M coupe [AB] en G et [CD] en H.

Où se situent les points M pour que les droites (EH) et (FG) soient parallèles ?



Productions de groupes d'élèves (exercice 10)

Groupe 1

D'après le théorème de Thalès

$(EH)//\ (FG)\ soit\ \dfrac{EM}{MF} = \dfrac{HM}{MG} = \dfrac{EH}{GF}\ donc\ EM \times MG = MF \times HM$

$EM \times MG \rightarrow aire\ du\ rectangle\ EMGA$

$MF \times HM \rightarrow aire\ du\ rectangle\ HCFM$

$(EH)//(FG)\ si\ l'aire\ de\ EMGA = l'aire\ de\ HCFM$

$Si\ M \in (DB)\ alors\ EMGA\ est\ le\ symétrique\ de\ HCFM\ par\ rapport$ à (DB).

$Donc\ si\ M \in (DB)\ alors\ (EH)//(FG)$.

Groupe 2

On veut démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{GF}$sont colinéaires pour cela il faudra mettre en place un repère orthonormé pour déterminer les coordonnées des vecteurs ensuite il faudra faire un produit en croix.

On suppose que le point M devra appartenir à la diagonale DB pour que les segments [EH] et [GF] soient parallèles.

$E(0; y)\quad G(x; 0)\quad H(x; 1)\quad F(1; y)$

$\overrightarrow{EH}(x_H - x_E; y_H - y_E)$

$\overrightarrow{EH}(x - 0; 1 - y)$

$\overrightarrow{EH}(x; 1 - y)$

$\overrightarrow{GF}(x_F - x_G; y_F - y_G)$

$\overrightarrow{GF}(1 - x; y - 0)$

$\overrightarrow{GF}(1 - x; y)$

$xy = (1 - x)(1 - y)$

$xy = 1 - y - x + xy$

$y = -x + 1$