ministère
Éducation
nationale

EBE MAT 1

SESSION 2014

CAPES
CONCOURS EXTERNE
TROISIÈME CONCOURS
ET CAFEP CORRESPONDANTS

Sections :

MATHÉMATIQUES
LANGUES RÉGIONALES : BRETON

PREMIÈRE ÉPREUVE D'ADMISSIBILITÉ

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche - y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

NB : La copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.

A

Problème 1 : applications du plan affine

Notations

– On désigne par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices 2×2 inversibles à coefficients réels.
– Soit un plan affine $\mathscr{P}$ muni d'un repère (O, I, J). Les coordonnées dans ce repère des points de $\mathscr{P}$ sont notées sous forme de matrices colonnes éléments de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Définition

Soit f une application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$. On dira que f vérifie *la condition des droites* si :

1. f est bijective.
2. Pour toute droite D de $\mathscr{P}$, $f(D)$ est aussi une droite de $\mathscr{P}$.

Le but du problème est de trouver toutes les applications vérifiant la condition des droites.

Partie A : conséquences de la condition des droites et exemples

1. Soit f une application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ vérifiant la condition des droites.
   1.1. Soient M et N deux points distincts de $\mathscr{P}$. Montrer que l'image par f de la droite (MN) est la droite $(f(M)f(N))$.
   1.2. Soient D et D' deux droites distinctes de $\mathscr{P}$. Montrer que $f(D) \cap f(D') = f(D \cap D')$.
   1.3. Montrer que les droites $f(D)$ et $f(D')$ sont parallèles si et seulement si les droites D et D' sont parallèles.
   1.4. Soient M, N, P trois points distincts de $\mathscr{P}$. Montrer que M, N et P sont alignés si et seulement si $f(M)$, $f(N)$ et $f(P)$ sont alignés.
   1.5. Soient M, N, P et Q quatre points distincts de $\mathscr{P}$. Montrer que $MNPQ$ est un parallélogramme si et seulement si $f(M)f(N)f(P)f(Q)$ est un parallélogramme.
2. Soient $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. On considère l'application $f_{A,B}$ de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui à tout point $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associe le point $AX + B$.
   2.1. Montrer que $f_{A,B}$ est bijective et déterminer son application réciproque.
   2.2. Soient M, N, P trois points distincts de $\mathscr{P}$. Montrer que M, N et P sont alignés si et seulement si $f_{A,B}(M)$, $f_{A,B}(N)$ et $f_{A,B}(P)$ sont alignés.
   2.3. Montrer que $f_{A,B}$ vérifie la condition des droites.
3. Soient O', I', J' trois points non alignés de $\mathscr{P}$. Montrer qu'il existe $A \in GL_2(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ tels que $f_{A,B}(O) = O'$, $f_{A,B}(I) = I'$ et $f_{A,B}(J) = J'$.

Partie B : endomorphisme de l'anneau $\mathbb{R}$

Soit ϕ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour pour tous nombres réels x et y :

$$\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y),\ \phi(xy) = \phi(x)\phi(y) \text{ et } \phi(1) = 1\,.$$

1. Montrer que $\phi(0) = 0$ et que pour tous nombres réels x et y, $\phi(x - y) = \phi(x) - \phi(y)$.
2. Montrer que pour tout nombre réel x et pour tout nombre réel non nul y, $\phi\left(\dfrac{x}{y}\right) = \dfrac{\phi(x)}{\phi(y)}$.
3. Montrer que pour tout entier naturel n, $\phi(n) = n$.
4. Montrer que pour tout nombre rationnel r, $\phi(r) = r$.
5. Soient a et b deux nombres réels, tels que $a \leqslant b$. Montrer que $\phi(a) \leqslant \phi(b)$. On pourra utiliser l'égalité $b - a = (\sqrt{b - a})^2$.
6. Soit x un nombre réel et soit ε un nombre réel strictement positif.

6.1. Montrer l'existence de deux nombres rationnels x' et x'' tels que $x-\varepsilon \leqslant x' \leqslant x \leqslant x'' \leqslant x+\varepsilon$.

6.2. En déduire que $x-\varepsilon \leqslant \phi(x) \leqslant x+\varepsilon$.

6.3. En déduire que $\phi = Id_{\mathbb{R}}$.

Partie C : un cas particulier

Soit f une application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ vérifiant la condition des droites et telle que $f(O)=O$, $f(I)=I$ et $f(J)=J$.

1. Justifier l'existence de deux applications ϕ et ψ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telles que pour tous nombres réels x et y, les images par f des points de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ sont respectivement $\begin{pmatrix} \phi(x) \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ \psi(y) \end{pmatrix}$.
2. Vérifier que $\phi(0)=\psi(0)=0$ et que $\phi(1)=\psi(1)=1$.
3. 3.1. Soient x et y deux nombres réels non nuls. Soient A, B, C les points du plan de coordonnées $A\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Montrer que $f(O)f(A)f(C)f(B)$ est un parallélogramme.

   3.2. En déduire que pour tous nombres réels x et y, l'image par f du point de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est le point de coordonnées $\begin{pmatrix} \phi(x) \\ \psi(y) \end{pmatrix}$.
4. 4.1. Soit x un nombre réel non nul. Soient A et B les points de coordonnées $A\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$.
   Montrer que $(f(A)f(B))$ est parallèle à (IJ).

   4.2. En déduire que pour tout nombre réel x, $\phi(x)=\psi(x)$.
5. 5.1. Soient x et y deux nombres réels non nuls. Soient A, B, C les points du plan de coordonnées $A\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} x+y \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $f(O)f(A)f(C)f(B)$ est un parallélogramme.

   5.2. Montrer que pour tous nombres réels x et y, $\phi(x+y)=\phi(x)+\phi(y)$.
6. 6.1. Soient x et y deux nombres réels non nuls. Soient A, B, C les points du plan de coordonnées $A\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix}$. Montrer que les droites (AC) et (IB) sont parallèles.

   6.2. Montrer que les droites $(f(A)f(C))$ et $(If(B))$ sont parallèles.

   6.3. En déduire que pour tous nombres réels x et y, $\phi(xy)=\phi(x)\phi(y)$.
7. Montrer que $f = Id_{\mathscr{P}}$.

Partie D : cas général

Soit f une application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ vérifiant la condition des droites.

1. Montrer que $f(O)$, $f(I)$ et $f(J)$ ne sont pas alignés.
2. Montrer qu'il existe $A \in GL_2(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ tels que $f_{A,B}(O)=f(O)$, $f_{A,B}(I)=f(I)$ et $f_{A,B}(J)=f(J)$.
3. Montrer que $f_{A,B}^{-1} \circ f = Id_{\mathscr{P}}$.
4. Donner toutes les applications vérifiant la condition des droites.

Problème 2 : équations différentielles

Après avoir étudié la structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients non constants, on s'intéresse à quelques propriétés des solutions d'équations différentielles linéaires du second ordre particulières.

Notations et rappels

1. Pour une équation différentielle appelée E, on note :
   - EH l'équation homogène associée ;
   - $\mathrm{Sol}(E)$ l'ensemble des solutions de l'équation E ;
   - $\mathrm{Sol}(EH)$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée EH.
2. On admet le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire pour les équations différentielles du second ordre, selon lequel :
   étant donnés un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide, a, b et c des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ et $(t_0, y_0, y_0') \in I \times \mathbb{R}^2$, il existe une unique fonction y, définie et de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'intervalle I qui vérifie le problème de Cauchy :
   $$\begin{cases} \forall t \in I, \quad y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t) \\ \qquad\qquad y(t_0) = y_0 \text{ et } y'(t_0) = y_0' \end{cases}.$$

Partie A : généralités

Soit E l'équation différentielle définie sur un intervalle I :

$$E : \; y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t).$$

où a, b et c sont des applications continues de I dans $\mathbb{R}$ et y une application de $\mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$, ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ de I dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $\mathrm{Sol}(EH)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$.
2. Soit t_0 un réel de l'intervalle I. On considère l'application φ_{t_0}, de $\mathrm{Sol}(EH)$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :
   $$\forall y \in \mathrm{Sol}(EH), \quad \varphi_{t_0}(y) = \begin{pmatrix} y(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}.$$
   Démontrer que φ_{t_0} est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
3. En déduire que $\mathrm{Sol}(EH)$ est un sous espace vectoriel de $\mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$ de dimension 2.
4. *Expression des solutions de E.*
   Soit (y_1, y_2) une base du sous-espace vectoriel $\mathrm{Sol}(EH)$ et p une solution particulière de E. Démontrer que les solutions de l'équation E sont les fonctions y qui s'écrivent sous la forme $y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + p$, où $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$.
5. Soient y_1 et y_2 deux solutions de l'équation EH. On note w l'application définie sur I par :
   $$t \mapsto w(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t).$$

5.1. Démontrer que w est une fonction dérivable sur l'intervalle I et que w est solution sur I de l'équation différentielle :

$$\forall t \in I, \quad w'(t) + a(t)w(t) = 0\,.$$

5.2. En déduire que les deux propriétés suivantes sont équivalentes.
- w est identiquement nulle, c'est-à-dire que $\forall t \in I, w(t) = 0$.
- w s'annule au moins une fois, c'est-à-dire que $\exists t_0 \in I, w(t_0) = 0$.

5.3. Dans cette question, on souhaite démontrer que si (y_1, y_2) est une base de $\mathrm{Sol}(EH)$, alors w ne s'annule pas sur I.
Pour cela, on raisonne par contraposée en supposant que $w = 0$ et on considère $t_0 \in I$ tel que $y_1(t_0) \neq 0$.
On définit la fonction z sur I par :

$$z : t \mapsto y_1(t_0)y_2(t) - y_2(t_0)y_1(t)\,.$$

Démontrer que z est solution de l'équation différentielle EH avec les conditions initiales $z(t_0) = 0$ et $z'(t_0) = 0$ et en déduire que la famille (y_1, y_2) est liée.
Conclure.

Partie B : solutions bornées d'une équation différentielle à coefficients constants

Soient b un réel et f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On s'intéresse à l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$:

$$E : \quad y''(t) + by(t) = f(t)\,.$$

1. *Étude de l'équation homogène* EH : $y''(t) + by(t) = 0$

   1.1. Déterminer l'ensemble $\mathrm{Sol}(EH)$ suivant les valeurs de b.

   1.2. Déterminer les valeurs du réel b pour lesquelles toutes les fonctions de $\mathrm{Sol}(EH)$ sont bornées.

2. *Étude de l'équation avec second membre*
On suppose dans cette question que $b = 1$ et on définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \mapsto g(x) = \int_0^x f(t)\sin(x - t)\mathrm{d}t\,.$$

Démontrer que g est une solution particulière de E et en déduire la solution générale de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$. *On pourra transformer l'expression* $\sin(x - t)$.

Partie C : étude de quelques propriétés des solutions d'une équation différentielle

Dans cette partie, on s'intéresse à quelques propriétés des solutions de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$: $y''(t) + b(t)y(t) = 0$, où b désigne une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Soit y une solution non identiquement nulle sur $\mathbb{R}$. On appelle zéro de la fonction y tout réel t tel que $y(t) = 0$. On souhaite démontrer que pour tout segment $[\alpha, \beta]$ inclus dans $\mathbb{R}$, le nombre de zéros de y dans $[\alpha, \beta]$ est fini.
Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe une solution y qui possède un nombre infini de zéros dans $[\alpha, \beta]$.

   1.1. Démontrer qu'il existe dans $[\alpha, \beta]$ une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de zéros de y deux à deux distincts convergeant vers un réel $\gamma \in [\alpha, \beta]$.

   1.2. Démontrer que $y(\gamma) = 0$.

1.3. Démontrer que, à partir d'un certain rang, le quotient $T_n = \dfrac{y(z_n) - y(\gamma)}{z_n - \gamma}$ est bien défini et que $y'(\gamma) = 0$.

1.4. En déduire que la solution y est nécessairement identiquement nulle et conclure.

1.5. En déduire que pour une solution y non identiquement nulle, on peut toujours trouver un intervalle J inclus dans $\mathbb{R}$ dans lequel y ne s'annule pas.

2. On suppose dans cette question que b est une fonction strictement négative sur $\mathbb{R}$. On souhaite montrer qu'une solution y non identiquement nulle ne peut avoir plus d'un zéro sur $\mathbb{R}$.
Pour cela, on raisonne à nouveau par l'absurde et on suppose qu'il existe une solution y non identiquement nulle possédant au moins deux zéros.

2.1. *Un résultat préliminaire*
Soient α et β deux réels tels que $\alpha < \beta$ et f une fonction convexe deux fois dérivable sur $[\alpha, \beta]$, non identiquement nulle sur $[\alpha, \beta]$ et telle que $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Démontrer que nécessairement $f < 0$ sur $]\alpha, \beta[$.

2.2. Démontrer qu'il existe un intervalle $[\alpha, \beta]$ sur lequel y est soit convexe, soit concave.

2.3. En déduire une contradiction et conclure.