SESSION DE 2007

- **Concours externe et troisième concours de recrutement de professeurs certifiés,**
- **Concours d'accès à des listes d'aptitude (CAFEP) correspondants**
- **Mention complémentaire : mathématiques**

sections : mathématiques
breton
tahitien

Première composition de mathématiques

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche – y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.

Les candidats doivent reporter sur leur copie, devant leurs réponses, la numérotation complète des questions de l'énoncé.

Dans le cas où un(e) candidat(e) repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il (elle) le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

NB : ***Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.***

Tournez la page S.V.P.

INTRODUCTION

L'objet du problème est l'étude de la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$\forall n \geq 1, \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

Dans une première partie, nous nous attacherons à démontrer, de différentes façons, par des méthodes élémentaires, que cette suite converge. Les parties 2, 3 et 4 suivantes seront consacrées à la détermination de sa limite S par divers moyens. Les parties 5 et 6 utiliseront la valeur de S pour calculer la somme de certaines séries numériques.

On rappelle que, pour tous entiers m, n vérifiant $m \leq n$, on note $[\![m, n]\!]$ l'intervalle d'entiers

$$[\![m, n]\!] = \{p \in \mathbb{Z} \mid m \leq p \leq n\}$$

PREMIÈRE PARTIE : Convergence de la suite

Dans cette partie, le candidat utilisera uniquement les connaissances faisant partie du programme de Terminale S.

1. *Première méthode*

a) Démontrer que, pour tout entier $k \geq 2$, on a la majoration

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

b) En déduire que la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ est majorée.

c) Démontrer que la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ converge et donner un majorant de sa limite.

Dans toute la suite du problème, on notera S cette limite.

2. *Deuxième méthode*

On considère la suite $(t_n)_{n\geq 1}$, définie par :

$$\forall n \geq 1, \quad t_n = s_n + \frac{1}{n}$$

a) Démontrer que les suites $(s_n)_{n\geq 1}$ et $(t_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.

b) Donner, en le justifiant, un encadrement d'amplitude 10^{-1} de S.

3. *Troisième méthode*

Ecrire le texte d'un exercice de niveau terminale S démontrant, par comparaison à une intégrale, la convergence de la suite $(s_n)_{n\geq 1}$.

DEUXIÈME PARTIE : Utilisation de polynômes

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n \geq 1$: $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n$.
Rappeler la formule permettant de calculer la somme $\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ des racines de P en fonction de ses coefficients a_k, $k \in [\![0, n]\!]$.

2. a) Soient $p \in \mathbb{N}$ et $\varphi \in \mathbb{R}$. Démontrer l'égalité

$$\sin\big((2p+1)\varphi\big) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} \cos^{2p-2k}(\varphi) \sin^{2k+1}(\varphi)$$

où $\binom{2p+1}{2k+1}$ désigne le coefficient binômial pour $k \in [\![0, p]\!]$.

b) En déduire que, pour tout entier $p \in \mathbb{N}$ et pour tout réel $\varphi \not\equiv 0[\pi]$, on a

$$\sin\big((2p+1)\varphi\big) = \sin^{2p+1}(\varphi) \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} \big(\operatorname{cotan}^2 \varphi\big)^{p-k}$$

où $\operatorname{cotan} \varphi = \dfrac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$.

3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme défini par :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} X^{p-k}$$

a) Pour tout entier $k \in [\![1, p]\!]$, on pose $\gamma_k = \operatorname{cotan}^2\left(\dfrac{k\pi}{2p+1}\right)$. Calculer $P(\gamma_k)$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$.

b) Vérifier que, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, le réel $\dfrac{k\pi}{2p+1}$ appartient à l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$. En déduire que le polynôme P possède p racines distinctes, que l'on déterminera.

c) En déduire les égalités :

$$\sum_{k=1}^{p} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \frac{p(2p-1)}{3}$$

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{2p+1}\right)} = \frac{2p(p+1)}{3}$$

4. **a)** Démontrer, pour tout réel $\varphi \in]0, \frac{\pi}{2}[$, les encadrements

$$0 < \sin\varphi < \varphi < \tan\varphi$$

b) En déduire que, pour tout entier $p \geq 1$, on a l'encadrement

$$\frac{p(2p-1)}{3} < \frac{(2p+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2} < \frac{2p(p+1)}{3}$$

c) Démontrer que $S = \dfrac{\pi^2}{6}$.

5. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$, $(v_n)_{n\geq 1}$ et $(w_n)_{n\geq 1}$ défines par :

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2} \qquad v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} \qquad w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$$

sont convergentes et déterminesr les valeurs exactes de leurs limites, respectivement notées U, V et W.

TROISIÈME PARTIE : Utilisation des intégrales de Wallis

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t \,\mathrm{d}t, \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n} t \,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad K_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} J_n$$

1. Calculer les intégrales I_0 et J_0.

2. **a)** Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $I_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2n+2} I_n$

(*Indication : on pourra penser à une intégration par parties.*)

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $I_n = \dfrac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \dfrac{\pi}{2}$

3. Soit $n \geq 1$.

a) Démontrer la relation $I_n = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n$

b) En déduire que $K_{n-1} - K_n = \dfrac{\pi}{4n^2}$

c) Démontrer la relation $\dfrac{\pi}{4} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = J_0 - K_n$

4. **a)** Démontrer que, pour tout réel $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a : $x \leq \dfrac{\pi}{2} \sin x$

b) En déduire que, pour tout entier n, on a

$$0 \leq J_n \leq \frac{\pi^2 I_n}{8(n+1)} \qquad \text{puis} \qquad 0 \leq K_n \leq \frac{\pi^3}{16(n+1)}$$

c) Retrouver la valeur de S.

QUATRIÈME PARTIE : Noyau de Dirichlet

Pour tout entier $n \geq 1$, on note D_n le *noyau de* DIRICHLET, défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$$

1. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $x \not\equiv 0[2\pi]$, on a

$$D_n(x) = \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin \frac{x}{2}}$$

2. Pour tout entier $n \geq 1$, on note L_n l'intégrale

$$L_n = \int_0^\pi x D_n(x)\,\mathrm{d}x$$

a) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi x\cos(kx)\,\mathrm{d}x$ pour tout entier $k \geq 1$.

b) En déduire que

$$L_n = \frac{\pi^2}{4} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{1}{k^2}$$

3. On note f le prolongement par continuité en 0 de la fonction définie sur l'intervalle $]0,\pi]$ par : $x \to \dfrac{x}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}$.

Démontrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0,\pi]$.

4. Soit $\phi : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$. Démontrer que

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^\pi \phi(x)\,\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}x = 0$$

(*Indication : on pourra penser à une intégration par parties.*)

5. **a)** Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n = 0$.

b) Retrouver la valeur de S. (*On utilisera la relation entre W et S obtenue à la question 5 de la deuxième partie*)

CINQUIÈME PARTIE : Une somme double

L'objet de cette partie est de calculer la limite de la somme double

$$\lim_{M\to+\infty}\left(\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{nm(n+m-1)}\right)$$

On pose, pour tout entier $N \geq 1$, $H_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$

1. a) Démontrer que pour tout entier $N \geq 1$, on a : $\ln(1+N) \leq H_N \leq 1+\ln(N)$

b) En déduire que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\frac{H_N}{N} = 0$

c) Démontrer que pour tout entier $M \geq 2$, on a :

$$\sum_{m=1}^{M-1}\frac{H_m}{m(m+1)} = \sum_{m=1}^{M}\frac{1}{m^2} - \frac{H_M}{M}$$

d) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{H_m}{m(m+1)}$ converge et déterminer sa limite.

2. Pour tous entier $N \geq 1$ et pour tout entier $m \geq 2$, on pose

$$Z_{N,m} = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+m-1)}$$

a) Démontrer que pour tout entier $m \geq 2$

$$Z_{N,m} = \frac{1}{m-1}\left(H_{m-1} - \sum_{n=N+1}^{N+m-1}\frac{1}{n}\right)$$

b) En déduire que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} Z_{N,m} = \frac{H_{m-1}}{m-1}$

3. a) Montrer que pour tout entier $N \geq 1$ et pour tout entier $M \geq 2$ on a :

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{nm(n+m-1)} = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} + \sum_{m=2}^{M}\frac{Z_{N,m}}{m}$$

b) Montrer que

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{nm(n+m-1)} = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{m=2}^{M}\frac{H_{m-1}}{m(m-1)}$$

c) En déduire alors

$$\lim_{M\to+\infty}\left(\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{nm(n+m-1)}\right)$$

SIXIÈME PARTIE : La fonction Dilogarithme

Pour tout réel $x \in [-1,1[$, on considère l'intégrale

$$\mathrm{Li}\,(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

1. Justifier l'existence de cette intégrale pour tout réel $x \in [-1,1[$.

2. On définit la fonction Dilogarithme

$$\mathrm{Li}\ :\left|\begin{array}{ccc}[-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \mathrm{Li}\,(x)\end{array}\right.$$

Démontrer que la fonction Li est prolongeable par continuité en 1. On notera encore Li ce prolongement par continuité.

3. a) Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$\mathrm{Li}\,(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}$$

b) En déduire la valeur de $\mathrm{Li}\,(1)$.

4. a) Pour $x \in]0,1[$, calculer la dérivée de $\mathrm{Li}\,(x) + \mathrm{Li}\,(1-x)$

b) Démontrer la relation fonctionnelle

$$\forall x \in]0,1[, \quad \mathrm{Li}\,(x) + \mathrm{Li}\,(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(1-x)\ln(x)$$

5. Déduire de la question précédente, la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n n^2}$

6. a) Pour tout réel $x \in]-1,1[$, démontrer la relation

$$\mathrm{Li}\,(x) + \mathrm{Li}\,(-x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Li}\,(x^2)$$

b) Retrouver la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$

7. a) Pour tout réel $x \in]0,1[$, démontrer la relation

$$\mathrm{Li}\,(x) - \mathrm{Li}\,(-x) + \mathrm{Li}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - \mathrm{Li}\left(\frac{x-1}{1+x}\right) = \frac{\pi^2}{4} + \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\ln(x)$$

b) En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{2}-1)^{2n+1}}{(2n+1)^2}$