5A82-19
repère à reporter sur la copie

SESSION DE 2006

concours externe de recrutement de professeurs certifiés et concours d'accès à des listes d'aptitude (CAFEP)

section : mathématiques

deuxième composition de mathématiques

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche – y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.

Les candidats doivent reporter sur leur copie, devant leurs réponses, la numérotation complète des questions de l'énoncé.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant les initiatives qu'il est amené à prendre de ce fait.

N.B. : ***Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé comporte notamment la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devez impérativement vous abstenir de signer ou de l'identifier.***

Tournez la page S.V.P.

Définitions et notations

On considère un espace affine euclidien orienté $\mathcal{E}$ de dimension 3, de direction E, muni d'un repère orthonormal direct $\mathcal{R}_0 = (O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$.

Le sous-espace affine de $\mathcal{E}$ d'équation $(z = 0)$ sera noté $\mathcal{P}$, et sa direction P. Par abus d'écriture, à partir de la partie III, le repère $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ de $\mathcal{P}$ sera également noté $\mathcal{R}_0$.

Si $\mathcal{R}$ est un repère d'un espace affine $\mathcal{X}$ de dimension quelconque n et si M est un point de $\mathcal{X}$, nous noterons $M\,(x_1, \ldots, x_n)_{\mathcal{R}}$ pour signifier que $x_1, \ldots, x_n$ sont les coordonnées de M dans le repère $\mathcal{R}$.

La partie de $\mathcal{P}$ formée des points à coordonnées entières est notée $\mathcal{Z}$:

$$M(x, y)_{\mathcal{R}_0} \in \mathcal{Z} \text{ si et seulement si } (x, y) \in \mathbb{Z}^2.$$

Si A et B sont deux points de $\mathcal{E}$, nous noterons AB la distance de A à B, (AB) la droite passant par les points A et B (quand $A \neq B$) et $[A, B]$ le segment d'extrémités A et B.

On note $\mathcal{Q}$ la quadrique de $\mathcal{E}$ d'équation :

$$(\mathcal{Q}) \qquad x^2 - 3xy + y^2 + x - y - \frac{1}{2}z^2 + \frac{\sqrt{10}}{5}z = 0$$

et $\mathcal{C}$ la conique intersection de $\mathcal{Q}$ et du plan $\mathcal{P}$:

$$(\mathcal{C}) \qquad \begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 + x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

On note $GA(\mathcal{P})$ le groupe affine de $\mathcal{P}$, c'est-à-dire l'ensemble des bijections affines de $\mathcal{P}$ sur lui-même : $GA(\mathcal{P})$ est un groupe pour la composition.

On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices réelles carrées d'ordre 2. Le sous-groupe multiplicatif des éléments inversibles de cette algèbre est noté $GL_2(\mathbb{R})$.

Le but de ce problème est d'étudier l'équation diophantienne :

$$(\Sigma) \qquad n^2 - 3np + p^2 + n - p = 0,$$

c'est-à-dire de déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des points de $\mathcal{C}$ à coordonnées entières : $\mathcal{S} = \mathcal{C} \cap \mathcal{Z}$.

La partie I présente une étude géométrique de la quadrique $\mathcal{Q}$ et de la conique $\mathcal{C}$; la partie II donne quelques méthodes arithmétiques d'étude de (Σ) ; la partie III introduit une famille de transformations affines qui permet, dans la partie IV, de décrire l'ensemble $\mathcal{S}$.

Les parties I et II sont indépendantes et la partie III est très largement indépendante des deux parties précédentes.

Partie I : étude de la quadrique $\mathcal{Q}$ et de la conique $\mathcal{C}$

I.1. Intersections de $\mathcal{Q}$ avec une famille de plans

On pose $\overrightarrow{u} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}\right)$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{k}$.

a) Déterminer le vecteur $\overrightarrow{w}$ tel que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ soit une base orthonormale directe de E.

b) On pose $\mathcal{R}_1 = (O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$. Soit M un point de $\mathcal{E}$; on le représente dans les deux repères par $M(x, y, z)_{\mathcal{R}_0} = M(x_1, y_1, z_1)_{\mathcal{R}_1}$. Exprimer x, y et z en fonction de x_1, y_1 et z_1, puis en déduire l'équation de $\mathcal{Q}$ dans le repère $\mathcal{R}_1$.

c) Pour $t \in \mathbb{R}$, soit $\mathcal{P}_t$ le plan d'équation $z_1 = t$ relativement au repère $\mathcal{R}_1$. Préciser la position de $\mathcal{P}_t$ dans $\mathcal{R}_0$ et en faire un croquis. Montrer que l'intersection de $\mathcal{P}_t$ et de $\mathcal{Q}$ est un cercle dont on précisera le centre C_t et le rayon R_t.

d) Préciser la valeur de t pour laquelle le cercle précédent se réduit à un point. Soit S ce point ; vérifier que $S\left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{\sqrt{10}}{5}\right)_{\mathcal{R}_0}$.

I.2. Nature de $\mathcal{Q}$ et de $\mathcal{C}$

Soit $\mathcal{R}$ le repère $(S, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$; on note (X, Y, Z) les coordonnées d'un point de $\mathcal{E}$ dans ce nouveau repère.

On note $\mathcal{P}'$ le plan admettant $\mathcal{R}' = (S, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ pour repère orthonormal.

a) Montrer que l'équation de $\mathcal{Q}$ dans le repère $\mathcal{R}$ est $X^2 + Y^2 = 5Z^2$.

b) Quelle est la nature de $\mathcal{Q}$? On remarquera en particulier que $\mathcal{Q}$ est une surface de révolution et on précisera son axe.

c) Montrer qu'un point $M(X, Y, Z)_{\mathcal{R}}$ est élément de $\mathcal{P}$ si et seulement si $Y = -\frac{\sqrt{10}}{5}$.

Faire une figure, sur une feuille de papier millimétrée, représentant, dans le repère $\mathcal{R}'$, la droite d'intersection $\mathcal{D} = \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$, ainsi que les deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ formant $\mathcal{Q} \cap \mathcal{P}'$. On prendra une unité égale à 8cm.

Pour toute la fin de cette partie, cette figure sera un outil important. On y placera les éléments définis ci-dessous ou leurs projections sur $\mathcal{P}'$, au fur et à mesure qu'ils apparaîtront utiles.

Quelle est la nature de la conique $\mathcal{C}$?

d) Montrer qu'il existe deux cercles dans $\mathcal{P}'$, de même rayon et centrés sur l'axe $(S, \overrightarrow{w})$, tangents aux trois droites D, D_1 et D_2. On note Ω_1 et Ω_2 leurs centres respectifs, et on note ρ la valeur commune de leurs rayons.

e) On note $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ les sphères de centres respectifs Ω_1 et Ω_2, et de rayon ρ. Montrer que ces sphères sont tangentes au plan $\mathcal{P}$ en deux points notés F_1 et F_2, et tangentes à $\mathcal{Q}$ le long de deux cercles que l'on note $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. Représenter sur la figure précédente les projections orthogonales sur $\mathcal{P}'$ de ces deux cercles, ainsi que les points F_1 et F_2.

I.3. Deux caractérisations de $\mathcal{C}$

a) Soit M un point quelconque de l'intersection $\mathcal{C} = \mathcal{Q} \cap \mathcal{P}$. Montrer que la droite (MS) est contenue dans $\mathcal{Q}$. On nomme T_1 et T_2 les intersections respectives de (MS) et des cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. Montrer que $MT_1 = MF_1$ et $MT_2 = MF_2$. Montrer par ailleurs que $|MT_1 - MT_2|$ est constant lorsque M décrit $\mathcal{C}$. Quelle propriété de $\mathcal{C}$ peut-on retrouver ainsi ?

b) Pour $i \in \{1, 2\}$, on nomme Δ_i la droite d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et du plan contenant le cercle $\mathcal{C}_i$, et U_i le centre de $\mathcal{C}_i$. Pour M point quelconque de l'intersection $\mathcal{C} = \mathcal{Q} \cap \mathcal{P}$, soit H_i la projection orthogonale de

M sur Δ_i. Vérifier que les points M, S, H_i, T_i et U_i sont coplanaires. En étudiant la figure formée par ces cinq points, prouver que le rapport $\dfrac{MH_i}{MT_i}$ reste constant quand M décrit $\mathcal{C}$. Quelle propriété de $\mathcal{C}$ peut-on retrouver ainsi ?

Partie II : résolution de l'équation diophantienne pour de petites valeurs de n

Pour n et p deux entiers tels que $0 \leq p \leq n$, on note $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ le coefficient binomial :

$$\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

avec la convention $0! = 1$.

Pour n et p entiers naturels supérieurs ou égaux à 1, on s'intéresse, lorsqu'elle a un sens, à l'équation :

$$(\Sigma_1) \qquad \begin{pmatrix} n \\ p-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ p \end{pmatrix}.$$

II.1. Une étude élémentaire

a) Montrer que cette équation est équivalente au système :

$$\begin{cases} 2 \leq p+1 \leq n, \\ n^2 + p^2 - 3np + n - p = 0. \end{cases}$$

b) Pour n entier supérieur ou égal à 1, montrer que le polynôme de variable X : $n^2 - 3nX + X^2 + n - X$ possède deux racines réelles, que l'on écrira sous la forme $X_1 = \dfrac{a_n - \sqrt{b_n}}{2}$ et $X_2 = \dfrac{a_n + \sqrt{b_n}}{2}$ où a_n et b_n sont deux entiers naturels. Pour quelles valeurs de n a-t-on $2 \leq X_1 + 1 \leq n$? Et pour quelles valeurs de n a-t-on $2 \leq X_2 + 1 \leq n$?

c) Montrer que si b est un entier naturel, $\sqrt{b}$ est rationnel si et seulement si b est un carré parfait.

d) On suppose que (n, p) est une solution de (Σ_1). Montrer que $2 \leq n$, que $5n^2 + 2n + 1$ est un carré parfait et donner une expression de p en fonction de n.

e) Réciproquement, soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 tel que $5n^2 + 2n + 1$ soit un carré parfait. Montrer qu'il existe un unique p tel que (n, p) soit solution de (Σ_1).

f) Pour n_0 entier naturel non nul, comment peut-on calculer tous les couples (n, p) solutions de (Σ_1) avec $1 \leq n \leq n_0$? On pourra donner un algorithme de calcul de ces solutions, sans utiliser un langage de programmation précis.

II.2 Une méthode plus arithmétique

Soit (n, p) une solution de (Σ_1).

a) On suppose que n et p sont premiers entre eux. Montrer que $np = (n-p)(n-p+1)$ et en déduire que n divise $p - 1$. Quelles sont toutes les solutions de (Σ_1) formées d'entiers premiers entre eux ?

b) On ne suppose plus maintenant que n et p sont premiers entre eux : on note $r = n \wedge p$ leur plus grand commun diviseur commun et on pose $n = ru$ et $p = rv$. Montrer successivement :

• r divise $u - v$; • $r = u - v$; • $v = \dfrac{\sqrt{5r^2+4} - r}{2}$; • $r^2 < \dfrac{2p}{\sqrt{5}-1}$.

c) Faire la liste de tous les couples (n, p) solutions de (Σ_1) pour $n \leq 105$.

Partie III : un groupe de transformations affines conservant $\mathcal{S}$.

Dans cette partie et la suivante, nous travaillons exclusivement dans le plan $\mathcal{P}$, dont le repère $(0, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ est encore noté $\mathcal{R}_0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et le repère $\mathcal{R}_1$ définis ci-dessous n'ont pas de rapport avec les éléments de mêmes noms définis dans la partie I.

III.1. Définition d'un nouveau repère $\mathcal{R}_1$ associé à la conique $\mathcal{C}$

a) Soit $I(-1/5, 1/5)_{\mathcal{R}_0}$. On pose alors $x_1 = x + \dfrac{1}{5}$ et $y_1 = y - \dfrac{1}{5}$. Quelle est l'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $(I, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$?

b) Mettre la forme quadratique $a^2 + b^2 - 3ab$ sous la forme d'un produit de formes linéaires. On pourra considérer $a^2 + b^2 - 3ab$ comme un trinôme d'inconnue b.

c) En déduire qu'il existe une base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de P telle que :

- les relations entre les coordonnées (x, y) dans le repère $\mathcal{R}_0$ et les coordonnées (X, Y) dans le repère $\mathcal{R}_1 = (I, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ soient de la forme :

$$\begin{cases} X = \alpha\left(x + \dfrac{1}{5}\right) - \left(y - \dfrac{1}{5}\right) \\ Y = \beta\left(x + \dfrac{1}{5}\right) + \left(y - \dfrac{1}{5}\right) \end{cases}$$

  avec $\alpha + \beta > 0$;

- l'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $(I, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ s'écrive : $5XY + 1 = 0$.

Expliciter les valeurs de α et β, ainsi que les relations exprimant les anciennes coordonnées (x, y) en fonction des nouvelles coordonnées (X, Y).

d) Que sont les axes du nouveau repère $\mathcal{R}_1$ pour la conique $\mathcal{C}$?

III.2. Transformations affines conservant $\mathcal{C}$

Nous étudions dans ce paragraphe l'ensemble G_1 des éléments de $GA(\mathcal{P})$ qui conservent la conique $\mathcal{C}$:

$$G_1 = \{h \in GA(\mathcal{P}),\ h(\mathcal{C}) = \mathcal{C}\}.$$

a) Montrer qu'un élément h de $GA(\mathcal{P})$ est élément de G_1 si et seulement si $h(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$.

b) Montrer que G_1 est un sous-groupe de $GA(\mathcal{P})$.

c) Soit $h \in GA(\mathcal{P})$. Montrer qu'il existe un et seul sextuplet (a, b, c, d, e, f) de réels tel que, pour tout point $M(X, Y)_{\mathcal{R}_1}$, l'image $M' = h(M)$ de M par h ait pour coordonnées, toujours dans le repère $\mathcal{R}_1$, $X' = aX + bY + c$ et $Y' = dX + eY + f$. Justifier que $ae - bd \neq 0$.

d) Montrer que si h est élément de G_1, le sextuplet (a,b,c,d,e,f) qui lui est associé vérifie les relations :

$$\begin{cases} ad = 0 \\ af + cd = 0 \\ 5cf - ae - bd = -1 \\ bf + ce = 0 \\ be = 0 \\ ae - bd \neq 0 \end{cases}$$

e) En déduire que G_1 est formé des transformations de la forme $M(X,Y)_{\mathcal{R}_1} \longmapsto M'(\mu X, Y/\mu)_{\mathcal{R}_1}$ et $M(X,Y)_{\mathcal{R}_1} \longmapsto M'(\mu Y, X/\mu)_{\mathcal{R}_1}$ où μ décrit $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Parmi ces transformations, lesquelles sont des symétries ?

f) On note G_1' la partie de $GL_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$A \in G_1' \iff \exists \mu \in \mathbb{R}^*,\ A = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1/\mu \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ 1/\mu & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que G_1' est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$ pour le produit matriciel et que l'application qui à toute matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$ de G_1' associe la transformation affine $M(X,Y)_{\mathcal{R}_1} \longmapsto M'(aX+bY, dX+eY)_{\mathcal{R}_1}$ est un isomorphisme de G_1' sur G_1.

III.3. Transformations affines conservant $\mathcal{Z}$

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à l'ensemble G_2 des éléments de $GA(\mathcal{P})$ qui conservent les points à coordonnées entières :

$$G_2 = \{h \in GA(\mathcal{P}),\ h(\mathcal{Z}) = \mathcal{Z}\}.$$

a) Un élément quelconque $h \in GA(\mathcal{P})$ vérifiant $h(\mathcal{Z}) \subset \mathcal{Z}$ est-il nécessairement élément de G_2 ?

b) Montrer que G_2 est un sous-groupe de $GA(\mathcal{P})$.

c) Montrer que les éléments de G_2 sont exactement les applications de la forme

$$M(x,y)_{\mathcal{R}_0} \longmapsto M'(ax+by+c, dx+ey+f)_{\mathcal{R}_0}$$

où $(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{Z}^6$ avec $|ae-bd| = 1$.

III.4. Le groupe Γ

a) Montrer qu'il existe deux points P_1 et P_2 tels que :

- $P_1 \neq O$, $P_2 \neq O$ et $P_1, P_2 \in \mathcal{S}$;
- P_1 est d'ordonnée nulle et P_2 est d'abscisse nulle.

Montrer qu'il existe deux transformations affines f_1 et f_2 telles que :

- $f_1(I) = I$, $f_1(O) = P_1$ et $f_1(P_1) = O$;
- $f_2(I) = I$, $f_2(O) = P_2$ et $f_2(P_2) = O$.

Si M est un point quelconque de $\mathcal{P}$, nous noterons respectivement (x, y) et (X, Y) les coordonnées de M dans les repères $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}_1$. De même, pour $i = 1$ et 2, nous noterons (x_i, y_i) et (X_i, Y_i) les coordonnées de $f_i(M)$ dans les repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_1$. Nous avons donc :

$$\begin{array}{rcl} M(x,y)_{\mathcal{R}_0} & = & M(X,Y)_{\mathcal{R}_1} \\ f_1(M)(x_1,y_1)_{\mathcal{R}_0} & = & f_1(M)(X_1,Y_1)_{\mathcal{R}_1} \\ f_2(M)(x_2,y_2)_{\mathcal{R}_0} & = & f_2(M)(X_2,Y_2)_{\mathcal{R}_1} \end{array}$$

Exprimer x_1, y_1, x_2 et y_2 en fonction de x et y et démontrer les relations matricielles :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \dfrac{1}{\lambda} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

où $\lambda = \dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}$. En déduire que f_1 et f_2 sont toutes deux des symétries appartenant à $G_1 \cap G_2$.

b) On s'intéresse maintenant au sous-groupe Γ de $GA(\mathcal{P})$ engendré par f_1 et f_2. Montrer que les éléments de Γ sont les éléments h de $GA(\mathcal{P})$ qui s'écrivent sous l'une des formes suivantes :

(i) $h = (f_1 \circ f_2)^k$ avec $k \in \mathbb{Z}$;

(ii) $h = f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

c) Montrer que Γ est isomorphe au sous-groupe Γ_1 de $GL_2(\mathbb{R})$ engendré par les matrices A_1 et A_2 :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \dfrac{1}{\lambda} & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer $A_1 A_2$ et en déduire :

$$\Gamma_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda^k & 0 \\ 0 & \lambda^{-k} \end{pmatrix},\ k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \lambda^{-k} \\ \lambda^k & 0 \end{pmatrix},\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

En déduire que la décomposition obtenue au b) est unique, c'est-à-dire que chaque élément h de Γ correspond à un et un seul des deux cas (i) ou (ii) et que l'entier relatif k intervenant dans la décomposition de h est unique.

d) Soit H un groupe dont la loi est notée mutiplicativement : l'élément neutre de H sera donc noté 1. On suppose qu'il existe deux éléments a_1 et a_2 de H tels que $a_1^2 = a_2^2 = 1$. Montrer qu'il existe un unique morphisme de groupe $\phi : \Gamma \to H$ tel que $\phi(f_1) = a_1$ et $\phi(f_2) = a_2$.

III.5. Utilisation de Γ pour engendrer une infinité de points de $\mathcal{S}$

a) Montrer que $\mathcal{S}$ est stable par Γ, c'est-à-dire que pour tout élément h de Γ et pour tout élément M de $\mathcal{S}$, $h(M)$ est élément de $\mathcal{S}$.

Comme l'origine O de $\mathcal{R}_0$ est élément de $\mathcal{S}$, on en déduit donc que les points M_k et N_k définis pour $k \in \mathbb{Z}$ par :

$$\begin{cases} M_k = (f_1 \circ f_2)^k(O) \\ N_k = (f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^k)(O) = f_2(M_k) \end{cases}$$

sont tous éléments de $\mathcal{S}$. Calculer M_1, M_2 et M_3 et comparer avec les résultats obtenus à la partie II.

b) Donner l'expression des coordonnées (x_k, y_k) de M_k dans le repère $\mathcal{R}_0$, en fonction de k et λ. Quelle transformation permet-elle d'obtenir M_{-k} à partir de M_k ?

c) Montrer que les applications :

$$\begin{cases} \phi_1 \ : x \longmapsto \dfrac{1}{2}\left(1+3x-\sqrt{1+2x+5x^2}\right) \\ \\ \phi_2 \ : x \longmapsto \dfrac{1}{2}\left(1+3x+\sqrt{1+2x+5x^2}\right) \end{cases}$$

sont des bijections de $\mathbb{R}$ sur lui-même. Quelles sont leurs applications réciproques ?

On note $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ les parties de $\mathcal{P}$ définies par :

$$\begin{cases} M(x,y)_{\mathcal{R}_0} \in \mathcal{C}_1 \Longleftrightarrow y = \phi_1(x) \quad , \\ \\ M(x,y)_{\mathcal{R}_0} \in \mathcal{C}_2 \Longleftrightarrow y = \phi_2(x) \quad . \end{cases}$$

Montrer que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ forment une partition de $\mathcal{C}$. Représenter rapidement les parties $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ainsi que les points M_{-1}, M_0, M_1, M_2, N_{-1}, N_0 et N_1.

d) Montrer que les applications f_1 et f_2 échangent les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, et donc que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont globalement invariantes par $f_1 \circ f_2$. Sur quelles parties de $\mathcal{C}$ les points M_k et N_k sont-ils situés ?

Partie IV : résolution de (Σ).

Soit $P(n,p)_{\mathcal{R}_0}$ un point de $\mathcal{S}$ distinct de O. Le but de cette partie partie est de démontrer que P est image de O par un élément h de Γ, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $P = M_k$ ou $P = N_k$.

IV.1. Premier cas : P est élément de $\mathcal{C}_1$ et $n > 0$

Soit la suite $(P_i)_{i \geq 0}$ définie par récurrence :

$$\begin{cases} P_0 = P \\ \\ P_{i+1} = (f_1 \circ f_2)^{-1}(P_i) \quad \text{pour tout } i \geq 0 \end{cases} .$$

Pour tout i, on notera α_i et β_i les coordonnées de P_i dans le repère $\mathcal{R}_0$.

a) Montrer que l'on a, pour tout i de $\mathbb{N}$, $\alpha_{i+1} = \phi_2^{-1} \circ \phi_1(\alpha_i)$ et $\beta_i = \phi_1(\alpha_i)$.

b) Montrer que la suite $(\alpha_i)_{i \geq 0}$ est strictement décroissante et non minorée. En déduire qu'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $\alpha_k \leq 0 < \alpha_{k-1}$.

c) Montrer que $\alpha_k = 0$ puis que $P = M_k$.

d) Quel est l'ensemble des solutions de l'équation (Σ_1) ?

IV.2. Deuxième cas : P est élément de $\mathcal{C}_1$ et $n < 0$

a) Montrer que le point $P'(-p, -n)_{\mathcal{R}_0}$ est élément de $\mathcal{C}_1$.

b) En déduire qu'il existe un entier relatif k strictement négatif tel que $P = M_k$.

IV.3. Troisième cas : P est élément de $\mathcal{C}_2$

Montrer qu'il existe k élément de $\mathbb{Z}$ tel que $P = N_k$.