S E S S I O N   D E   2 0 0 3

concours externe
de recrutement de professeurs certifiés
et concours d'accès à des listes d'aptitude (CAFEP)

sections : mathématiques
breton

première composition de mathématiques

Durée : 5 heures

Calculatrice électronique de poche – y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique, à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

Tout document et tout autre matériel électronique sont interdits.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.

Les candidats doivent reporter sur leur copie, devant leurs réponses, la numérotation complète des questions de l'énoncé.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant les initiatives qu'il est amené à prendre de ce fait.

Notations et objets du problème

On désigne par $\mathbb{N}$ *l'ensemble des entiers naturels, par* $\mathbb{R}$ *le corps des nombres réels et par* $\mathbb{R}^+$ *l'ensemble des réels positifs ou nuls.*

Pour tout entier naturel n *et tout entier* k *compris entre* 0 *et* n*, on note* C_n^k *le coefficient binomial défini par :*

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

avec la convention $0! = 1$.

Si A, B *sont deux ensembles, avec* B *inclus dans* A*, on note* $A \setminus B$ *l'ensemble :*

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

On rappelle que si E *est un espace vectoriel réel, une famille* $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in K}$ *de vecteurs non nuls de* E *est une base si pour tout vecteur* x *dans* E *il existe une unique famille de scalaires* $(x_j)_{j\in L}$*, où* L *est une partie finie de* K*, telle que* $x = \sum\limits_{j\in L} x_j e_j$.

Sauf indication contraire, on désigne par a *et* b *des réels tels que* $a < b$ *et par* I *l'intervalle fermé borné* $[a, b]$.

On note $\mathcal{C}(I)$ *l'espace vectoriel réel des fonctions définies sur* I *à valeurs réelles et continues.*

On note $\mathcal{F}$ *l'espace vectoriel réel des fonctions définies sur* $\mathbb{R}$ *à valeurs réelles périodiques de période* 2π et *continues.*

Pour éviter les répétitions dans les définitions qui suivent on désigne par $\mathcal{H}$ *l'espace vectoriel* $\mathcal{C}(I)$ *ou* $\mathcal{F}$ *et par* J *l'intervalle* I *dans le cas où* $\mathcal{H}$ *est l'espace* $\mathcal{C}(I)$ *ou l'intervalle* $\mathbb{R}$ *dans le cas où* $\mathcal{H}$ *est l'espace* $\mathcal{F}$.

Pour toute fonction f *appartenant à* $\mathcal{H}$ *on désigne par* $|f|$ *la fonction définie par :*

$$|f| : \begin{array}{ccc} J & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |f(x)| \end{array}$$

L'espace $\mathcal{H}$ *est muni de la norme de la convergence uniforme définie par :*

$$\forall f \in \mathcal{H}, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in J} |f(x)|.$$

On munit l'espace $\mathcal{H}$ *de la relation d'ordre partiel notée* $\leq$ *et définie par :*

$$\forall (f, g) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}, \quad (f \leq g) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in J, \quad f(x) \leq g(x)).$$

On dit qu'une fonction f *appartenant à* $\mathcal{H}$ *est positive et on note* $0 \leq f$*, si* $0 \leq f(t)$ *pour tout* t *dans* J.

On désigne par $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ *l'espace vectoriel des endomorphismes de* $\mathcal{H}$*. Un élément de* $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ *est aussi appelé un opérateur linéaire sur* $\mathcal{H}$.

On dit qu'un opérateur linéaire u *sur* $\mathcal{H}$ *est positif s'il transforme toute fonction positive appartenant à* $\mathcal{H}$ *en une fonction positive.*

On note $\mathbb{R}[x]$ *l'espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *des fonctions polynomiales d'une variable à coefficients réels. Cet espace est muni de la base* $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ *définie par :*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad e_k(x) = x^k.$$

On note $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$ formé des polynômes trigonométriques à coefficients réels, c'est-à-dire des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme :

$$x \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right),$$

où n est un entier naturel, le coefficient a_0 et les coefficients a_k, b_k pour tout entier k compris entre 1 et n sont réels. Cet espace est muni de la base $\{c_k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{s_k \mid k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \forall k \in \mathbb{N}, & c_k(x) = \cos(kx), \\ \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, & s_k(x) = \sin(kx). \end{cases}$$

On remarquera que $c_0 = e_0$.

Pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{F}$, on désigne par $(a_k(f))_{k \geq 0}$ et $(b_k(f))_{k \geq 1}$ les coefficients de Fourier de f définis par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt)\, dt,$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt)\, dt.$$

On note :

$$S_0(f) = \frac{a_0(f)}{2} c_0 \tag{1}$$

et pour tout entier n strictement positif, on désigne par $S_n(f)$ le polynôme trigonométrique défini par :

$$S_n(f) = \frac{a_0(f)}{2} c_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k(f) c_k + b_k(f) s_k\right). \tag{2}$$

La partie **I** *est consacrée aux opérateurs linéaires positifs. Cette partie est utilisée par les parties* **II** *et* **III**.

La partie **II** *est consacrée au théorème suivant sur l'approximation uniforme des fonctions continues sur un intervalle fermé borné et à valeurs réelles :*

Théorème 1 (Korovkin) *Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'endomorphismes positifs de $\mathcal{C}(I)$, où I est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, telle que pour toute fonction f appartenant à $\{e_0, e_1, e_2\}$ la suite $(u_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I, alors pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}(I)$ la suite de fonctions $(u_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I.*

La partie **III** *indépendante de la partie* **II** *est consacrée au théorème suivant sur l'approximation uniforme des fonctions périodiques, continues sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles :*

Théorème 2 (Korovkin) *Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'endomorphismes positifs de $\mathcal{F}$ telle que pour toute fonction f appartenant à $\{c_0, c_1, s_1\}$, la suite $(u_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$, alors pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{F}$, la suite $(u_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.*

– I – Opérateurs linéaires positifs. Propriétés et exemples

I.1 Soit u un opérateur linéaire positif sur $\mathcal{H}$. Montrer que :

$$\forall f \in \mathcal{H}, \quad |u(f)| \leq u(|f|).$$

I.2 Soit u un opérateur linéaire positif sur $\mathcal{H}$. Montrer que u est l'endomorphisme nul si et seulement si $u(e_0) = 0$.

I.3 Montrer que tout opérateur linéaire positif sur $\mathcal{H}$ est continu.

I.4 Soit u un opérateur linéaire positif sur $\mathcal{H}$. Justifier l'existence de :

$$\|u\|_\infty = \sup_{f \in \mathcal{H} \setminus \{0\}} \frac{\|u(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty}$$

et exprimer cette quantité en fonction de u et de e_0.

I.5 *Pour cette question on se place dans $\mathcal{H} = \mathcal{C}(I)$ avec $I = [a, b]$.*
Soit n un entier strictement positif. Etant donnés $n+1$ points $(x_{n,k})_{0 \leq k \leq n}$ deux à deux distincts de I et $n+1$ fonctions $(u_{n,k})_{0 \leq k \leq n}$ de $\mathcal{C}(I)$, montrer que l'opérateur linéaire u_n défini sur $\mathcal{C}(I)$ par :

$$\forall f \in \mathcal{C}(I), \quad u_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f(x_{n,k})\, u_{n,k}$$

est positif si et seulement si toutes les fonctions $u_{n,k}$, pour k compris entre 0 et n, sont positives.

I.6 *Pour cette question on se place dans $\mathcal{H} = \mathcal{C}(I)$ avec $I = [0, 1]$ et on se donne un entier n strictement positif.*
On note φ_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi_n(x, y) = \left(x e^{\frac{y}{n}} + 1 - x\right)^n.$$

Pour tout entier k compris entre 0 et n, on désigne par $B_{n,k}$ la fonction polynomiale définie par :

$$\forall x \in I, \quad B_{n,k}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \tag{3}$$

et B_n est l'opérateur linéaire positif défini par :

$$\forall f \in \mathcal{C}(I), \quad B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}. \tag{4}$$

I.6.1 Pour tout réel y on désigne par f_y la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_y(x) = e^{xy}.$$

Montrer que :

$$\forall x \in I, \quad B_n(f_y)(x) = \varphi_n(x, y).$$

I.6.2 Montrer que pour tout entier naturel j on a :

$$B_n(e_j)(x) = \frac{\partial^j \varphi_n}{\partial y^j}(x, 0).$$

I.6.3 Exprimer $B_n(e_j)$ dans la base $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ pour $j = 0, 1, 2$.

I.7 *Pour cette question on se place dans $\mathcal{H} = \mathcal{F}$ et on désigne par K un polynôme trigonométrique. On associe à ce polynôme l'opérateur linéaire u défini sur $\mathcal{F}$ par :*

$$\forall f \in \mathcal{F}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad u(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) K(t)\, dt.$$

I.7.1 Montrer que pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{F}$ on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K(x-t)\, dt.$$

I.7.2 Montrer que pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{F}$, $u(f)$ est un polynôme trigonométrique.

I.7.3 Montrer que l'opérateur linéaire u est positif si et seulement si la fonction K est à valeurs positives ou nulles.

I.8 *Pour cette question on se place dans $\mathcal{H} = \mathcal{F}$, on se donne un entier naturel n strictement positif et on considère l'opérateur linéaire T_n défini sur $\mathcal{F}$ par :*

$$\forall f \in \mathcal{F}, \quad T_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(f), \tag{5}$$

où S_0 désigne l'opérateur linéaire défini sur $\mathcal{F}$ par (1) et *pour tout entier naturel k* non nul, *S_k désigne l'opérateur linéaire défini sur $\mathcal{F}$ par* (2).

I.8.1 Montrer que, pour tout entier naturel p strictement positif, la fonction θ_p définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi$ par :

$$x \mapsto \frac{\sin(px)}{\sin(x)}$$

se prolonge en une fonction continue et périodique de période 2π sur $\mathbb{R}$. On note encore θ_p ce prolongement.

I.8.2 Montrer que pour tout réel x on a :

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx)\right) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2n+1}{2} x\right). \tag{6}$$

I.8.3 Montrer que pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{F}$ on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \theta_{2n+1}\left(\frac{x-t}{2}\right) dt.$$

I.8.4 Montrer que pour tout réel x on a :

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right)\left(\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left((2k+1)\frac{x}{2}\right)\right) = \sin^2\left(\frac{n}{2} x\right). \tag{7}$$

I.8.5 Montrer que pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{F}$ on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T_n(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_n(x-t)\, dt,$$

où K_n est un polynôme trigonométrique.

I.8.6 Montrer que l'opérateur linéaire T_n est positif.

I.8.7 Calculer $S_n(c_j)$, $T_n(c_j)$ pour tout entier naturel j et $S_n(s_j)$, $T_n(s_j)$ pour tout entier naturel j non nul.

– II – Théorème de Korovkin sur $\mathcal{C}(I)$

Pour cette partie on se place dans $\mathcal{H} = \mathcal{C}(I)$ avec $I = [a,b]$.

II.1 Soit f un élément de $\mathcal{C}(I)$. Montrer que pour tout réel ε strictement positif, on peut trouver un réel η strictement positif tel que :

$$\forall (t,x) \in I \times I, \quad |f(t) - f(x)| \leq \varepsilon + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2}(t-x)^2. \tag{8}$$

II.2 *Pour toute fonction g appartenant à $\mathcal{C}(I)$, pour tout entier naturel k et pour tout réel x fixé dans I, on désigne par $g - g(x)e_k$ la fonction de I dans $\mathbb{R}$ définie par :*

$$t \mapsto g(t) - g(x)t^k.$$

Soit f appartenant à $\mathcal{C}(I)$. Montrer que pour tout réel ε strictement positif, on peut trouver un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, \quad |f - f(x)e_0| \leq \varepsilon e_0 + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2}\left(e_2 - 2xe_1 + x^2 e_0\right). \tag{9}$$

II.3 Soient u un opérateur linéaire positif sur $\mathcal{C}(I)$ et f une fonction appartenant à $\mathcal{C}(I)$. Montrer que pour tout réel ε strictement positif, on peut trouver un réel η strictement positif tel que :

$$\forall x \in I, \quad |u(f - f(x)e_0)| \leq \varepsilon u(e_0) + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta^2}\left(u(e_2) - 2xu(e_1) + x^2 u(e_0)\right). \tag{10}$$

II.4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'endomorphismes positifs de $\mathcal{C}(I)$ telle que pour toute fonction f appartenant à $\{e_0, e_1, e_2\}$ la suite $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I.

II.4.1 Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad g_n = u_n(e_2) - 2e_1 u_n(e_1) + e_2 u_n(e_0)$$

converge uniformément vers la fonction nulle sur I.

II.4.2 Montrer que pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}(I)$, la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in I, \quad h_n(x) = (u_n(f - f(x)e_0))(x)$$

converge uniformément vers la fonction nulle sur I (on peut utiliser l'inégalité (10)).

II.4.3 Montrer que, pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}(I)$, la suite $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I.

II.5 Pour cette question on prend $[a,b]=[0,1]$ et on considère la suite d'opérateurs linéaires $(B_n)_{n\geq 1}$ définie par (4).
Montrer que pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}(I)$, la suite $(B_n(f))_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

II.6 *Pour cette question $I=[a,b]$ est à nouveau un intervalle quelconque.*
Montrer que le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}[x]$ des fonctions polynomiales à coefficients réels est dense dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}(I)$ muni de la norme de la convergence uniforme.

II.7 Pour cette question on prend $I=[0,b]$ avec b réel strictement positif. Si f est une fonction continue sur I, on la prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ en posant $f(x)=f(b)$ pour x supérieur ou égal à b.

II.7.1 Montrer que pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}(I)$ et pour tout entier naturel n strictement positif on peut définir une fonction $u_n(f)$ appartenant à $\mathcal{C}(I)$ en posant :

$$\forall x\in I,\quad u_n(f)(x)=e^{-nx}\sum_{k=0}^{+\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{n^k}{k!}x^k.$$

II.7.2 Montrer que pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}(I)$ la suite de fonctions $(u_n(f))_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur I.

II.8 *Pour cette question $I=[a,b]$ est à nouveau un intervalle quelconque.*
Soient $\theta_0,\theta_1,\theta_2$ trois fonctions appartenant à $\mathcal{C}(I)$ pour lesquelles on peut trouver des coefficients réels a_0,a_1,a_2 non tous nuls tels que la fonction $\theta=a_0\theta_0+a_1\theta_1+a_2\theta_2$ admette au moins trois racines réelles deux à deux distinctes, x_0,x_1,x_2 dans I.

II.8.1 Montrer qu'on peut trouver trois réels $\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2$ non tous nuls tels que :

$$\begin{cases} |\lambda_k|<1 \quad (k=0,1,2), \\ \text{au moins deux des } \lambda_k \text{ sont positifs ou nuls,} \\ \lambda_0\theta_k(x_0)+\lambda_1\theta_k(x_1)+\lambda_2\theta_k(x_2)=0 \quad (k=0,1,2). \end{cases}$$

En modifiant si nécessaire la numérotation des racines de la fonction θ, on peut supposer que :

$$-1<\lambda_0\leq\lambda_1\leq\lambda_2<1,\quad \lambda_1\geq 0.$$

Pour tout entier n strictement positif, on désigne par δ_n la restriction à l'intervalle I de la fonction affine par morceaux et continue définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{array}{l} x\notin\left[x_0-\dfrac{1}{n},x_0+\dfrac{1}{n}\right] \quad\Rightarrow\quad \delta_n(x)=0, \\ \delta_n(x_0)=1, \\ \delta_n \textit{ affine sur } \left[x_0-\dfrac{1}{n},x_0\right] \textit{ et sur } \left[x_0,x_0+\dfrac{1}{n}\right]. \end{array}$$

On associe à δ_n l'opérateur linéaire u_n défini sur $\mathcal{C}(I)$ par :

$$\forall f\in\mathcal{C}(I),\quad u_n(f)=(e_0-\delta_n)f+((1+\lambda_0)f(x_0)+\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2))\,\delta_n.$$

II.8.2 Montrer que, pour tout entier n strictement positif, l'opérateur linéaire u_n est positif.

II.8.3 Montrer que, pour tout entier k compris entre 0 et 2, la suite de fonctions $(u_n(\theta_k))_{n\geq 1}$ converge uniformément vers θ_k sur $[a,b]$.

II.8.4 Montrer qu'on peut trouver une fonction f appartenant à $\mathcal{C}(I)$ telle que la suite $(u_n(f))_{n\geq 1}$ ne converge pas uniformément vers f sur I.

– III – Théorème de Korovkin sur $\mathcal{F}$

Pour cette partie on se place dans $\mathcal{H} = \mathcal{F}$.

III.1 Montrer que toute fonction f appartenant à $\mathcal{F}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Pour tout x fixé dans $\mathbb{R}$, on désigne par ψ_x la fonction définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \psi_x(t) = \sin^2\left(\frac{t-x}{2}\right).$$

III.2 Soient f appartenant à $\mathcal{F}$. Montrer que pour tout réel ε strictement positif, on peut trouver un réel η dans l'intervalle $]0,\pi[$ tel que l'on ait :

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(t) - f(x)| \leq \varepsilon + 2\frac{\|f\|_\infty}{\psi_0(\eta)}\psi_x(t). \tag{11}$$

Pour f appartenant à $\mathcal{F}$ et x fixé dans $\mathbb{R}$, $f - f(x)c_0$ désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$t \mapsto f(t) - f(x).$$

III.3 Soit f une fonction appartenant à $\mathcal{F}$. Montrer que pour tout réel ε strictement positif, on peut trouver un réel η dans l'intervalle $]0,\pi[$ tel que l'on ait :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f - f(x)c_0| \leq \varepsilon c_0 + \frac{\|f\|_\infty}{\psi_0(\eta)}(c_0 - \cos(x)c_1 - \sin(x)s_1). \tag{12}$$

III.4 Soient u un opérateur linéaire positif sur $\mathcal{F}$ et f une fonction appartenant à $\mathcal{F}$. Montrer que pour tout réel ε strictement positif, on peut trouver un réel η dans l'intervalle $]0,\pi[$ tel que l'on ait :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |u(f - f(x)c_0)| \leq \varepsilon u(c_0) + \frac{\|f\|_\infty}{\psi_0(\eta)}(u(c_0) - \cos(x)u(c_1) - \sin(x)u(s_1)). \tag{13}$$

III.5 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'endomorphismes positifs de $\mathcal{F}$ telle que pour toute fonction f appartenant à $\{c_0, c_1, s_1\}$, la suite $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.*

III.5.1 Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad g_n = u_n(c_0) - c_1 u_n(c_1) - s_1 u_n(s_1)$$

converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

III.5.2 Montrer que, pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{F}$, la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad h_n(x) = (u_n(f - f(x)c_0))(x),$$

converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$ (on peut utiliser (13)).

III.5.3 Montrer que, pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{F}$, la suite $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

III.6 Montrer que, pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{F}$, la suite $(T_n(f))_{n\geq 1}$ définie par (5) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.