SESSION DE 1998

concours externe de recrutement de professeurs certifiés et concours d'accès à des listes d'aptitude (CAFEP)

section : mathématiques

deuxième composition de mathématiques

Durée : 5 heures

L'usage d'instruments de calcul, en particulier d'une calculatrice électronique de poche — éventuellement programmable et alphanumérique — à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.

Tournez la page S.V.P.

NOTATIONS DU PROBLÈME

Soit Π un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On notera d la distance sur Π. Si $\mathscr{R}$ est un sous-ensemble non vide de Π et M un point de Π, on notera $d(M, \mathscr{R})$ la distance de M à $\mathscr{R}$, définie par $d(M, \mathscr{R}) = \inf_{N \in \mathscr{R}} d(M, N)$. Étant donné un point M de Π et un réel positif r, on notera $\overline{B}(M; r)$ le disque fermé de centre M et de rayon r et $C(M; r)$ le cercle de centre M et de rayon r. Si r est strictement positif, on notera $B(M; r)$ le disque ouvert de centre M et de rayon r. Étant donné deux points A et B de Π, on note $[A, B]$ le segment d'extrémités A et B et on note $]A, B[$ ce segment privé de ses extrémités.

La frontière d'un sous-ensemble $\mathscr{R}$ de Π sera notée $\partial\mathscr{R}$: on rappelle qu'un point M appartient à $\partial\mathscr{R}$ si et seulement si tout disque ouvert de centre M contient au moins un point appartenant à $\mathscr{R}$ et au moins un point n'appartenant pas à $\mathscr{R}$. On a en particulier $\partial\overline{B}(M; r) = \partial B(M; r) = C(M; r)$.

Soit $\mathscr{R}$ un sous-ensemble borné non vide de Π. Pour tout point M de Π, on notera $n(M)$, avec éventuellement $n(M) = \infty$, le nombre des points T de $\partial\mathscr{R}$ tels que $d(M, \partial\mathscr{R}) = d(M, T)$. On appellera squelette de $\mathscr{R}$, et on notera $sq(\mathscr{R})$, le sous-ensemble des points M de $\mathscr{R}$ tels que $n(M) \geqslant 2$.

I. EXEMPLES DE SQUELETTES

I.1. Squelette d'un carré.

Dans cette question on désigne par $\mathscr{R}$ l'ensemble des points M du plan Π dont les coordonnées (x, y) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ vérifient $|x| < 1$ et $|y| < 1$. On note A, B, C et D les points de coordonnées respectives $(1, 1), (-1, 1), (-1, -1)$ et $(1, -1)$.

I.1.1. Démontrer que $\partial\mathscr{R}$ est la réunion des quatre segments $[A, B], [B, C], [C, D]$ et $[D, A]$.

I.1.2. Démontrer que si un point M de coordonnées (x, y) est intérieur au triangle OAD, on a alors $d(M, \partial\mathscr{R}) = 1 - x$ et $n(M) = 1$.

I.1.3. Démontrer que si un point M de coordonnées (x, y) appartient à $]O, A[$, on a alors $d(M, \partial\mathscr{R}) = 1 - x = 1 - y$ et $n(M) = 2$.

I.1.4. Calculer $n(O)$.

I.1.5. Démontrer que $sq(\mathscr{R}) =]A, C[\cup]B, D[$.

I.1.6. Démontrer que le squelette de l'intérieur d'un carré est la réunion de ses diagonales, sommets non compris.

I.2. Squelette d'un disque.

Dans cette question on désigne par $\mathscr{R}$ le disque ouvert $B(A; r)$.

I.2.1. Démontrer que si un point M appartient à $\mathscr{R}$ et est différent de A, on a alors $n(M) = 1$.

I.2.2. Calculer $n(A)$.

I.2.3. Quel est le squelette de $\mathscr{R}$?

I.3. Squelette d'un triangle.

Soit A, B et C trois points non alignés du plan Π. Un point du plan sera repéré par ses coordonnées barycentriques (α, β, γ) relativement aux points A, B et C, normalisées par $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Dans cette question, on désigne par $\mathscr{R}$ l'ensemble des points intérieurs au triangle ABC, c'est-à-dire l'ensemble des points de coordonnées barycentriques strictement positives. On notera $a = d(B, C)$, $b = d(C, A)$, $c = d(A, B)$ et S l'aire du triangle. On admet que $\partial\mathscr{R} = [A, B] \cup [B, C] \cup [C, A]$.

I.3.1. Soit M un point de $\mathscr{R}$ de coordonnées barycentriques (α, β, γ) relativement aux points A, B et C. Exprimer la distance de M à la droite (B, C) en fonction de a, α et S.

I.3.2. En déduire les coordonnées barycentriques du point I, centre du cercle inscrit dans le triangle ABC.

I.3.3. Démontrer qu'un point M appartient à l'intérieur du triangle IBC si et seulement si

$$\frac{\alpha}{a} < \min\left(\frac{\beta}{b}, \frac{\gamma}{c}\right).$$

I.3.4. Démontrer que, si M appartient à l'intérieur du triangle IBC, le produit scalaire $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC}$ est strictement positif. En déduire que $d(M, [B, C]) = d(M, (B, C))$ et que $n(M) = 1$.

I.3.5. Décrire le squelette de $\mathscr{R}$.

I.4. Squelette d'un parallélogramme.

On suppose le plan Π orienté. Soit A, B, C et D quatre points de Π tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $d(A, B) = 2\, d(A, D)$, $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = 2\, (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ et $\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) > 0$.

I.4.1. Déterminer une mesure des angles $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ et $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD})$.

Dessiner un parallélogramme ABCD en indiquant l'orientation sur la figure.

I.4.2. Soit $\mathscr{R}$ l'ensemble des points intérieurs au parallélogramme ABCD. On admet que $\partial\mathscr{R} = [A, B] \cup [B, C] \cup [C, D] \cup [D, A]$.

Décrire $sq(\mathscr{R})$ sans expliciter votre démonstration et représenter $sq(\mathscr{R})$ sur la figure de la question précédente.

I.4.3. $sq(\mathscr{R})$ est une réunion de 5 segments, privée de 4 points. Calculer la longueur totale de $sq(\mathscr{R})$ en fonction de $l = d(A, D)$.

I.5. Squelette d'un domaine elliptique.

Soit a et b deux nombres réels tels que $a > b > 0$. On désigne par $\mathscr{R}$ l'ensemble des points M de Π dont les coordonnées (x, y) vérifient $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$. On admet que $\partial\mathscr{R}$ est l'ellipse de centre O, de demi-grand axe a et de demi-petit axe b admettant l'axe des x comme axe principal. On désigne par A et A′ les sommets du grand axe de cette ellipse, l'abscisse de A étant positive.

I.5.1. Déterminer le lieu géométrique $\mathscr{V}$ des points d'intersection de la droite (A, A′) avec la normale en M à $\partial\mathscr{R}$ quand M décrit $\partial\mathscr{R} - \{A, A'\}$.

I.5.2. Démontrer que $sq(\mathscr{R})$ est un segment privé de ses extrémités.

I.6. Squelette d'une tête de chat.

Soit B le point de coordonnées (0, 1) et U le point de coordonnées (0, 2). Les tangentes issues de U au cercle $C(O; 1)$ rencontrent $C(O; 1)$ en T et T′, l'abscisse de T étant positive. La parallèle à la droite (U, T′) menée de B coupe (U, T) en K et la parallèle à (U, T) menée de B coupe (U, T′) en K′. On désigne par Γ la courbe simple fermée constituée par les segments [T′, K′], [K′, B], [B, K], [K, T] et l'arc du cercle $C(O; 1)$ d'extrémités T et T′ ne contenant pas B. On note $\mathscr{R}$ la région ouverte intérieure à Γ et on admet que $\partial\mathscr{R} = \Gamma$.

Tournez la page S.V.P.

I.6.1. Démontrer que sq ($\mathscr{R}$) est la réunion de deux segments et de deux arcs de conique, privée de 2 points. Déterminer les excentricités, les foyers et les directrices des deux coniques.

I.6.2. Démontrer que sq ($\mathscr{R}$) admet une tangente en chacun de ses points, sauf un.

I.6.3. Calculer la longueur de sq ($\mathscr{R}$) à 10^{-4} près.

II. UNE PROPRIÉTÉ DES SQUELETTES

Soit $\mathscr{R}$ un ouvert borné non vide de Π.

II.1. **Disques contenus dans $\mathscr{R}$.**

II.1.1. Démontrer que $\partial\mathscr{R}$ est un compact non vide, que $\mathscr{R} \cap \partial\mathscr{R}$ est vide et que la fermeture $\overline{\mathscr{R}}$ de $\mathscr{R}$ est compacte et est égale à $\mathscr{R} \cup \partial\mathscr{R}$.

II.1.2. On note φ l'application de Π dans l'ensemble des réels, définie par $\varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{d}(\mathrm{M}, \partial\mathscr{R})$. Démontrer que φ est continue.

II.1.3. Démontrer que, pour tout point M de $\mathscr{R}$, la boule ouverte $\mathrm{B}(\mathrm{M}; \varphi(\mathrm{M}))$ est contenue dans $\mathscr{R}$.

II.1.4. Démontrer que, pour tout point M de $\mathscr{R}$ et tout réel $r > 0$, si la boule fermée $\overline{\mathrm{B}}(\mathrm{M}; r)$ est contenue dans $\mathscr{R}$, alors $\varphi(\mathrm{M}) > r$.

En déduire que, pour tout point M de $\mathscr{R}$, la boule fermée $\overline{\mathrm{B}}(\mathrm{M}; \varphi(\mathrm{M}))$ rencontre $\partial\mathscr{R}$ en au moins un point F.

II.2. **Comment retrouver $\mathscr{R}$ à partir de son squelette et de l'application φ ?**

Soit M_0 un point fixé de $\mathscr{R}$ et r un réel strictement positif tel que $\overline{\mathrm{B}}(\mathrm{M}_0; r) \subset \mathscr{R}$. On note $\mathscr{R}_0$ le sous-ensemble des points M de $\mathscr{R}$ tels que $\overline{\mathrm{B}}(\mathrm{M}_0; r) \subset \overline{\mathrm{B}}(\mathrm{M}; \varphi(\mathrm{M}))$.

II.2.1. On suppose que M appartient à $\mathscr{R}_0$ et que $\overline{\mathrm{B}}(\mathrm{M}; \varphi(\mathrm{M})) \cap \partial\mathscr{R}$ ne contient qu'un seul point F. Démontrer que, quel que soit le réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que, pour tout point P de $\mathrm{C}(\mathrm{M}; \varphi(\mathrm{M}))$ vérifiant $\mathrm{d}(\mathrm{F}, \mathrm{P}) \geqslant \varepsilon$, on ait $\varphi(\mathrm{P}) > \alpha$.

En déduire, en choisissant ε assez petit, qu'il existe un point M′ de la demi-droite d'origine F passant par M, appartenant à $\mathscr{R}_0$ et tel que $\varphi(\mathrm{M}') > \varphi(\mathrm{M})$.

II.2.2 Démontrer que la restriction de l'application φ à $\mathscr{R}_0$ atteint sa borne supérieure en un point S_0 de $\mathscr{R}_0$.

II.2.3. Démontrer que S_0 appartient à sq ($\mathscr{R}$).

II.2.4. Démontrer que $\mathscr{R} = \bigcup_{\mathrm{S} \in \mathrm{sq}(\mathscr{R})} \mathrm{B}(\mathrm{S}; \varphi(\mathrm{S}))$.