SESSION DE 1996

concours externe de recrutement de professeurs certifiés et concours d'accès à des listes d'aptitude (CAFEP)

section : mathématiques

première composition de mathématiques

Durée : 5 heures

L'usage d'instruments de calcul, en particulier d'une calculatrice électronique de poche — éventuellement programmable et alphanumérique — à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.

Tournez la page S.V.P.

OBJET ET NOTATIONS DU PROBLÈME

Ce problème a pour objet l'étude de propriétés de majoration et de minoration de solutions d'équations différentielles linéaires du second ordre.

$I = [\alpha, \beta]$ désigne un intervalle de $\mathbf{R}$. On note $C(I)$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues définies sur I. Pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, on note $C^p(I)$ le sous-espace de $C(I)$ formé des fonctions p fois continûment dérivables et $C_0^p(I)$ le sous-espace de $C^p(I)$ formé des fonctions nulles en α et β.

Trois fonctions u, v et w appartenant à $C(I)$ étant fixées, on leur associe le problème différentiel **(P)** suivant :

> Étant donné $(\lambda, \mu, f) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times C(I)$, trouver $y \in C^2(I)$ vérifiant :
>
> $$\begin{cases} \forall t \in I, \quad u(t)\, y''(t) + v(t)\, y'(t) + w(t)\, y(t) = f(t) \\ y(\alpha) = \lambda, \quad y(\beta) = \mu. \end{cases}$$

On dira que **(P)** vérifie la propriété **(P.M)** si :

> Il existe des fonctions positives $a \in C(I)$ et $b \in C(I)$ et des réels positifs A et B tels que, quelle que soit la donnée (λ, μ, f), toute solution y de **(P)** vérifie :
>
> $$\forall t \in I, \quad y(t) \leqslant a(t) \max\left(A\lambda, B\mu, \sup_{s \in I} (b(s) f(s))\right).$$

I. ÉTUDE D'UNE ÉQUATION À COEFFICIENTS CONSTANTS

On pose $I = [0, 1]$ et on considère le problème différentiel $(\mathbf{P}_1)$ associé aux fonctions u, v et w définies par $u(t) = -1$, $v(t) = 0$ et $w(t) = c^2$, avec $c > 0$.

I.1. Résolution de l'équation homogène.

Montrer que les fonctions Y_0 et Y_1 définies par $Y_0(t) = \operatorname{sh}(ct)$ et $Y_1(t) = \operatorname{sh}(c(1-t))$ forment une base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $-y'' + c^2 y = 0$.

I.2. Résolution du problème $(\mathbf{P}_1)$.

I.2.1. Une fonction $f \in C(I)$ étant fixée, déterminer en fonction de Y_0 et Y_1 les solutions de l'équation différentielle $-y'' + c^2 y = f(t)$. [On pourra utiliser la méthode de variation des constantes. On rappelle que $\operatorname{sh}(p+q) = \operatorname{sh}(p)\operatorname{ch}(q) + \operatorname{ch}(p)\operatorname{sh}(q)$].

I.2.2. Montrer que $(\mathbf{P}_1)$ a une unique solution qui se met sous la forme :

$$y(t) = \frac{\operatorname{sh}(ct)}{\operatorname{sh} c}\left[\mu + \frac{1}{c}\int_t^1 f(s)\operatorname{sh}(c(1-s))\,\mathrm{d}s\right] + \frac{\operatorname{sh}(c(1-t))}{\operatorname{sh} c}\left[\lambda + \frac{1}{c}\int_0^t f(s)\operatorname{sh}(cs)\,\mathrm{d}s\right].$$

I.3. **Démonstration de la propriété (P.M) pour le problème $(\mathbf{P}_1)$.**

On note M la borne supérieure de f sur I.

I.3.1. Utiliser le résultat du I.2.2. pour établir l'inégalité suivante :

$$\forall t \in I, \quad y(t) \leqslant \frac{\operatorname{sh}(c(1-t)) + \operatorname{sh}(ct)}{\operatorname{sh} c} \max(\lambda, \mu) + \left(1 - \frac{\operatorname{sh}(c(1-t)) + \operatorname{sh}(ct)}{\operatorname{sh} c}\right) \frac{M}{c^2}.$$

I.3.2. Exprimer $\operatorname{sh} p + \operatorname{sh} q$ en fonction de $\operatorname{sh}\left(\frac{p+q}{2}\right)$ et $\operatorname{ch}\left(\frac{p-q}{2}\right)$ ainsi que $\operatorname{sh}(2p)$ en fonction de $\operatorname{sh} p$ et $\operatorname{ch} p$.

I.3.3. Pour $t \in I$, montrer que $\dfrac{\operatorname{sh}(c(1-t)) + \operatorname{sh}(ct)}{\operatorname{sh} c}$ reste compris entre 0 et 1. En déduire que $(\mathbf{P}_1)$ vérifie la propriété **(P.M)** avec $a = 1$, $b = \dfrac{1}{c^2}$, $A = B = 1$.

I.3.4. Étant donné une fonction $h \in C(I)$, comparer $\inf_{s \in I} (-h(s))$ avec $\sup_{s \in I} (h(s))$. En déduire une propriété de minoration des solutions de $(\mathbf{P}_1)$ sur le modèle de **(P.M)**.

I.4. **Extension à un intervalle quelconque.**

On considère plus généralement un problème différentiel $(\hat{\mathbf{P}}_1)$ de même type, avec $u(t) = -1$, $v(t) = 0$ et $w(t) = c^2$, mais défini sur $I = [\alpha, \beta]$.

Montrer, en faisant le changement de variable affine $t = \alpha + (\beta - \alpha)s$, que $(\hat{\mathbf{P}}_1)$ vérifie **(P.M)**.

II. ÉTUDE D'UNE ÉQUATION À COEFFICIENTS NON CONSTANTS

On prend $I = [\alpha, \beta]$, avec $0 < \alpha < \beta$, et on considère le problème différentiel $(\mathbf{P}_2)$ associé aux fonctions u, v et w définies par $u(t) = -t^2$, $v(t) = -2t$ et $w(t) = 1$.

II.1. **Démonstration de la propriété (P.M) pour le problème $(\mathbf{P}_2)$.**

II.1.1. Déterminer $\gamma \in \mathbf{R}$ tel que, si y est solution de l'équation différentielle

$$-t^2 y'' - 2ty' + y = f(t),$$

alors la fonction z définie par $z(x) = e^{-\gamma x} y(e^x)$ est solution d'une équation différentielle de la forme $-z'' + c^2 z = g(x)$. On précisera la valeur de la constante c et la relation entre les fonctions f et g.

II.1.2. Déduire du I.4. que le problème $(\mathbf{P}_2)$ vérifie **(P.M)** (on précisera les fonctions a et b et les constantes A et B).

II.1.3. Formuler et démontrer une propriété de minoration des solutions de $(\mathbf{P}_2)$.

Tournez la page S.V.P.

II.2. **Solution développable en série entière.**

On cherche à déterminer et à majorer les solutions de l'équation différentielle

$$- t^2 y'' - 2ty' + y = \arctan t$$

qui sont développables en série entière au voisinage de 0.

II.2.1. On suppose qu'une solution y de l'équation différentielle est, sur un intervalle $]-R, R[$, somme d'une série entière $\sum_{p \geqslant 0} a_p t^p$.

Montrer que $a_{2k} = 0$ et exprimer a_{2k+1} en fonction de k.

II.2.2. Quel est le rayon de convergence de la série ainsi obtenue ?
Conclure sur l'existence d'une solution développable en série entière au voisinage de 0.

II.2.3. La série est-elle uniformément convergente sur $[-1, 1]$? Les fonctions dérivées y' et y'' sont-elles sommes des séries dérivées sur $[-1, 1]$?

II.2.4. Pour n donné et $t \in]0, 1[$, trouver un majorant indépendant de t de l'erreur commise en remplaçant $y(t)$ par la somme partielle $\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} a_{2k+1} t^{2k+1}$. Déterminer une valeur de n qui assure que cette erreur reste inférieure à 10^{-5}. Calculer une valeur approchée à 10^{-5} près de $\lambda = y\left(\frac{1}{3}\right)$ et $\mu = y\left(\frac{2}{3}\right)$.

II.2.5. Utiliser II.1. pour obtenir un majorant et un minorant de y sur $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$.

III. UNE FAMILLE DE PROBLÈMES VÉRIFIANT (P.M)

On considère dans cette partie les problèmes différentiels **(P)** sur $I = [\alpha, \beta]$, pour lesquels les fonctions u et v sont définies par $u(t) = -1$, $v(t) = 0$ et la fonction w est strictement positive. On notera $(\mathbf{P}_3)$ un tel problème.

III.1. **Existence et unicité d'une solution d'un problème $(\mathbf{P}_3)$.**

III.1.1. Justifier que l'équation différentielle $-y'' + w(t)y = 0$ admet une unique solution Y_0 définie sur I vérifiant $Y_0(\alpha) = 0$ et $Y'_0(\alpha) = 1$ ainsi qu'une unique solution Y_1 définie sur I vérifiant $Y_1(\alpha) = 1$ et $Y'_1(\alpha) = 0$.

III.1.2. Montrer, en étudiant l'intégrale $\int_\alpha^\beta (-Y''_0(s) + w(s)\, Y_0(s))\, Y_0(s)\, \mathrm{d}s$, que $Y_0(\beta)$ n'est pas nul.

III.1.3. Montrer que la fonction $Y_0 Y'_1 - Y_1 Y'_0$ est constante sur I.

III.1.4. Soit $f \in C(I)$. Exprimer en fonction de Y_0, Y_1 et f la solution générale de l'équation différentielle $-y'' + w(t)y = f(t)$.

III.1.5. Démontrer que, quelle que soit la donnée (λ, μ, f), le problème $(\mathbf{P}_3)$ a toujours une solution unique.

III.2. **Démonstration de la propriété (P.M) pour un problème $(\mathbf{P}_3)$.**

On note y la solution du problème $(\mathbf{P}_3)$ correspondant à une donnée (λ, μ, f).

III.2.1. Montrer que, quelle que soit la fonction $z \in C_0^1(I)$, on a :

$$\int_\alpha^\beta y'(s)\,z'(s)\,\mathrm{d}s + \int_\alpha^\beta w(s)\,y(s)\,z(s)\,\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f(s)\,z(s)\,\mathrm{d}s.$$

III.2.2. Soit G une fonction réelle, définie et de classe C^1 sur $\mathbf{R}$, nulle sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Vérifier que $t\,G(t) \geqslant 0$ quel que soit $t \in \mathbf{R}$. Montrer que, si la constante réelle K vérifie $K \geqslant \max(\lambda, \mu)$, alors la fonction z définie sur I par $z(t) = G(y(t) - K)$ appartient à $C_0^1(I)$.

III.2.3. Montrer que, si K vérifie $K \geqslant \max(\lambda, \mu)$, on a :

$$\int_\alpha^\beta y'^2(s)\,G'(y(s) - K)\,\mathrm{d}s + \int_\alpha^\beta w(s)\,(y(s) - K)\,G(y(s) - K)\,\mathrm{d}s$$
$$= \int_\alpha^\beta (f(s) - Kw(s))\,G(y(s) - K)\,\mathrm{d}s.$$

En déduire que, si K est assez grand pour que $f(t) - Kw(t) \leqslant 0$ quel que soit $t \in I$, alors on a $y(t) \leqslant K$ quel que soit $t \in I$.

III.2.4. Démontrer que $(\mathbf{P}_3)$ vérifie **(P.M)** (on précisera les fonctions a et b et les constantes A et B). Formuler et démontrer une propriété de minoration des solutions de $(\mathbf{P}_3)$.

III.3. **D'autres problèmes vérifiant (P.M).**

On considère dans cette question des problèmes différentiels **(P)** sur $I = [\alpha, \beta]$ pour lesquels les fonctions u et v sont toujours définies par $u(t) = -1$, $v(t) = 0$, mais pour lesquels la fonction w est de signe quelconque. On note $(\mathbf{P}_4)$ un tel problème.

On fixe h une fonction strictement positive appartenant à $C^2(I)$ et telle que $h(\alpha) = h(\beta) = 1$. On note k une primitive de $\dfrac{1}{h^2}$, $\alpha' = k(\alpha)$ et $\beta' = k(\beta)$.

III.3.1. Justifier que k admet une fonction réciproque k^{-1} et faire dans $(\mathbf{P}_4)$ le changement de fonction défini par $y(t) = h(t)\,z(k(t))$.

III.3.2. Démontrer que, si h est telle que la fonction $-h'' + wh$ soit strictement positive, alors $(\mathbf{P}_4)$ vérifie **(P.M)** et a, quelle que soit la donnée (λ, μ, f), une solution unique.

III.3.3. *Application :* on suppose que la fonction $w + \dfrac{\pi^2}{(\beta - \alpha)^2}$ est strictement positive.

Montrer qu'il existe un réel $m > 0$ tel que l'on ait simultanément $m < \dfrac{\pi}{\beta - \alpha}$ et $w + m^2 > 0$.

Montrer que la fonction h définie par $h(t) = \dfrac{\cos m\left(t - \dfrac{\alpha + \beta}{2}\right)}{\cos m\,\dfrac{\beta - \alpha}{2}}$ vérifie toutes les conditions précédentes. Conclure.

Tournez la page S.V.P.

IV. UNICITÉ DES SOLUTIONS DES PROBLÈMES VÉRIFIANT (P.M)

IV.1. Unicité des solutions.

Soit **(P)** un problème différentiel sur $I = [\alpha, \beta]$ vérifiant **(P.M)**.

IV.1.1. On note y_1 et y_2 des solutions de **(P)** correspondant à des données (λ_1, μ_1, f_1) et (λ_2, μ_2, f_2). Montrer que si $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$, $\mu_1 \leqslant \mu_2$ et $f_1 \leqslant f_2$, on a alors $y_1 \leqslant y_2$.

IV.1.2. En déduire que si **(P)** a une solution pour une donnée (λ, μ, f), alors cette solution est unique.

IV.2. Un contre-exemple.

Montrer que le problème différentiel **(P)** sur $I = [\alpha, \beta]$ associé aux fonctions u, v et w définies par $u(t) = -1$, $v(t) = 0$ et $w(t) = -\dfrac{\pi^2}{(\beta - \alpha)^2}$ ne vérifie pas **(P.M)**.