SESSION DE 1995

concours externe de recrutement de professeurs certifiés

section : mathématiques

deuxième composition de mathématiques

Durée : 5 heures

L'usage d'instruments de calcul, en particulier d'une calculatrice électronique de poche — éventuellement programmable et alphanumérique — à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.

Tournez la page S.V.P.

OBJET ET NOTATIONS DU PROBLÈME

Ce problème a pour objet l'étude de certaines propriétés des matrices symétriques réelles.

L'espace $\mathbf{R}^n$ sera muni de sa structure canonique d'espace euclidien, sa base canonique sera notée $\mathscr{E} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ et la norme euclidienne d'un élément x sera notée $\|x\|$. Relativement à une base fixée, un élément x (resp. y, etc.) de $\mathbf{R}^n$ sera représenté par la matrice colonne X (resp. Y, etc.) de ses coordonnées x_i (resp. y_i, etc.). On appellera *plan vectoriel* de $\mathbf{R}^n$ tout sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathbf{R}^n$.

À toute matrice symétrique réelle A, de terme général a_{ij}, on associera la forme bilinéaire symétrique Φ_A définie sur l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$, rapporté à sa base canonique $\mathscr{E}$, par

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n, \quad \Phi_A(x, y) = {}^t\mathrm{X\,AY} = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} a_{ij}\, x_i\, y_j .$$

On notera Q_A la forme quadratique associée à Φ_A et Σ_A la A-*sphère unité* définie dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$, rapporté à sa base canonique $\mathscr{E}$, par

$$\Sigma_A = \{x \in \mathbf{R}^n \mid Q_A(x) = {}^t\mathrm{X\,AX} = 1\}.$$

Une forme quadratique Q sur un espace euclidien E est dite *définie positive* si et seulement si on a $Q(x) > 0$ pour tout x non nul de E. Dans l'algèbre des matrices carrées réelles à n lignes et n colonnes, on notera $S_n(\mathbf{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques et $S_n^+(\mathbf{R})$ le sous-ensemble des matrices symétriques A telles que la forme quadratique Q_A soit définie positive.

I. Caractérisations de $S_n^+(\mathbf{R})$ liées à la A-sphère unité Σ_A

I.1. Premier exemple.

On considère la matrice symétrique réelle $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}$.

I.1.1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A_1.

I.1.2. Donner l'expression d'une matrice orthogonale directe P et d'une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ telles que $\lambda < \mu$ et que ${}^t\mathrm{P}\,A_1\,\mathrm{P} = D$. En déduire que A_1 appartient à $S_2^+(\mathbf{R})$.

I.1.3. Déterminer la nature de la conique Σ_{A_1} et son excentricité.

I.2. Deuxième exemple.

On considère la matrice symétrique réelle $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$.

Démontrer directement que $Q_{A_2}(x) \geqslant 0$ pour tout x de $\mathbf{R}^2$ mais que A_2 n'appartient pas à $S_2^+(\mathbf{R})$. Déterminer la nature de la conique Σ_{A_2}.

I.3. Caractérisation de $S_n^+(\mathbf{R})$ par la compacité de Σ_A.

Soit A un élément de $S_n(\mathbf{R})$. Démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

i. A appartient à $S_n^+(\mathbf{R})$.

ii. Les valeurs propres de A sont toutes strictement positives.

iii. Σ_A est un compact non vide de $\mathbf{R}^n$.

Caractériser en fonction des valeurs propres de A les cas où Σ_A est vide.

I.4. **Caractérisation de $S_n^+(R)$ par les sections planes de Σ_A.**

I.4.1. Soit A un élément de $S_n^+(R)$. Démontrer que la restriction de Q_A à un plan vectoriel Π de R^n est une forme quadratique définie positive.

I.4.2. Soit A un élément de $S_n(R)$. Démontrer que A appartient à $S_n^+(R)$ si et seulement si tout plan vectoriel de R^n coupe Σ_A suivant une ellipse.

II. Sections circulaires de la A-sphère unité Σ_A quand $n = 3$

Soit A un élément de $S_3(R)$ et $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3$ ses valeurs propres.

II.1. **Cas où A a une valeur propre triple.**

On suppose que A a une seule valeur propre triple : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$.

Quelle est, suivant le signe de la valeur propre, la nature de Σ_A ? En déduire que ou bien Σ_A est vide, ou bien tout plan vectoriel coupe Σ_A suivant un cercle.

II.2. **Cas où A a une valeur propre double.**

On suppose que A a deux valeurs propres distinctes, une simple et une double : $\lambda_1 = \lambda_2 < \lambda_3$ ou $\lambda_1 < \lambda_2 = \lambda_3$.

II.2.1. Démontrer que Σ_A est invariante par toute rotation d'axe le sous-espace propre Δ relatif à la valeur propre simple.

II.2.2. Démontrer que, si un plan vectoriel Π non perpendiculaire à Δ coupait Σ_A suivant un cercle Γ, alors Σ_A contiendrait la surface obtenue en faisant tourner Γ autour de Δ et que cette surface serait incluse dans une sphère centrée à l'origine. Démontrer que cela est impossible [on pourra étudier la distance de l'origine à un point de Σ_A].

II.2.3. Déterminer, suivant le signe de la valeur propre double, le nombre de plans vectoriels coupant Σ_A suivant un cercle.

II.3. **Cas où A n'a que des valeurs propres simples.**

On suppose que A a trois valeurs propres distinctes : $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

II.3.1. Soit Π_0 le plan vectoriel engendré par les sous-espaces propres relatifs à λ_1 et λ_2. Démontrer que si un plan vectoriel Π coupe Σ_A suivant un cercle, alors la restriction de Q_A à $\Pi \cap \Pi_0$ est une forme quadratique définie positive. En déduire qu'une condition nécessaire pour qu'il existe un plan vectoriel Π coupant Σ_A suivant un cercle est que $\lambda_2 > 0$.

II.3.2. L'espace R^3 étant rapporté à une base orthonormale de vecteurs propres de A, justifier que $\sqrt{\lambda_3 - \lambda_2}\, x_3 - \sqrt{\lambda_2 - \lambda_1}\, x_1 = 0$ est l'équation d'un plan vectoriel Π. En remarquant que

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = \lambda_2 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + (\lambda_3 - \lambda_2)\, x_3^2 - (\lambda_2 - \lambda_1)\, x_1^2,$$

démontrer que, si $\lambda_2 > 0$, le plan Π coupe Σ_A suivant un cercle.

Pour $\lambda_2 > 0$, déterminer un autre plan vectoriel Π', distinct de Π, coupant Σ_A suivant un cercle.

Tournez la page S.V.P.

II.3.3. Étant donné deux plans vectoriels distincts Π et Π', on rapporte $\mathbf{R}^3$ à une base orthonormale (f_1, f_2, f_3) telle que f_2 appartienne à la droite $\Pi \cap \Pi'$ et que f_1 et f_3 appartiennent aux plans bissecteurs de Π et Π'. Démontrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ tel que $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ et que $\mathscr{B} = (\alpha f_1 - \beta f_3, f_2)$ (resp. $\mathscr{B}' = (\alpha f_1 + \beta f_3, f_2)$) soit une base orthonormale de Π (resp. Π').

Exprimer $Q_A(s(\alpha f_1 - \beta f_3) + t f_2)$ et $Q_A(s(\alpha f_1 + \beta f_3) + t f_2)$ en fonction des scalaires s, t, α, β et des $u_{ij} = \Phi_A(f_i, f_j)$ avec $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 3$. En déduire une équation de $\Pi \cap \Sigma_A$ (resp. $\Pi' \cap \Sigma_A$) dans la base $\mathscr{B}$ (resp. $\mathscr{B}'$).

Démontrer que, si ces intersections sont des cercles, on a $u_{12} = u_{13} = u_{23} = 0$ et $u_{22} = \alpha^2 u_{11} + \beta^2 u_{33}$. En déduire que (f_1, f_2, f_3) est alors une base de vecteurs propres de A et que la valeur propre relative à f_2 est comprise entre celles relatives à f_1 et f_3.

II.3.4. Déduire de ce qui précède qu'il existe exactement deux plans vectoriels distincts coupant Σ_A suivant un cercle lorsque $\lambda_2 > 0$.

II.4. Exemple.

L'espace $\mathbf{R}^3$ est rapporté à sa base canonique. On considère la matrice symétrique réelle

$$A_3 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

II.4.1. Démontrer que, pour tout x de $\mathbf{R}^3$, on a $Q_{A_3}(x) \geqslant 3 \| x \|^2$ [on pourra, après l'avoir justifiée, se servir de l'inégalité $2uv \leqslant u^2 + v^2$]. Quelle est la nature géométrique de l'intersection de Σ_{A_3} avec un plan vectoriel ?

II.4.2. En remarquant que l'équation de Σ_{A_3} peut s'écrire :

$$4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - x_2(2x_1 - x_2 + 2x_3) = 1,$$

déterminer deux plans vectoriels distincts coupant Σ_{A_3} suivant un cercle. Y en a-t-il d'autres ?

II.4.3. Déterminer, selon les valeurs du nombre réel h, la nature géométrique de l'intersection de Σ_{A_3} avec les plans affines d'équation $x_2 = h$ et $2x_1 - x_2 + 2x_3 = h$.

III. Décomposition de Choleski

III.1. Existence d'une décomposition.

III.1.1. Démontrer qu'une matrice A appartient à $S_n^+(\mathbf{R})$ si et seulement si il existe une matrice inversible M telle que $A = {}^tMM$ [on pourra diagonaliser A pour établir que la condition est nécessaire].

III.1.2. Soit $\mathscr{V} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ la famille des vecteurs-colonnes d'une matrice inversible M. Justifier que $\mathscr{V}$ est une base de $\mathbf{R}^n$. Soit $\mathscr{W} = (w_1, w_2, ..., w_n)$ la base orthonormale obtenue par application à la base $\mathscr{V}$ du procédé d'orthonormalisation de Schmidt. Démontrer que la matrice de passage T de la base $\mathscr{W}$ à la base $\mathscr{V}$ est triangulaire supérieure.

Soit O la matrice de passage de la base canonique $\mathscr{E}$ à la base $\mathscr{W}$. Justifier que O est orthogonale et démontrer que $M = OT$.

III.1.3. Déduire de ce qui précède que toute matrice A appartenant à $S_n^+(\mathbf{R})$ peut s'écrire sous la forme ${}^tTT$ avec T une matrice triangulaire supérieure inversible.

III.2. **Une application : majoration du déterminant de** A.

Soit A un élément de $S_n^+(\mathrm{R})$ et T une matrice triangulaire supérieure telle que $A = {}^t TT$. On note a_{ij} le terme général de A et t_{ij} le terme général de T. Démontrer que $0 < t_{ii}^2 \leqslant a_{ii}$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

En déduire que $0 < \det A \leqslant \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} a_{ii}$. À quelle condition a-t-on $\det A = \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} a_{ii}$?

III.3. **Algorithme de décomposition.**

L'espace R^n est rapporté à sa base canonique. Soit A un élément de $S_n(\mathrm{R})$ de terme général a_{ij}.

III.3.1. Démontrer qu'il est équivalent de trouver une matrice triangulaire supérieure inversible T telle que $A = {}^t TT$ et de trouver une écriture de la forme quadratique Q_A de la forme :

$$\forall x \in \mathrm{R}^n, \quad Q_A(x) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\sum_{i \leqslant j \leqslant n} t_{ij} x_j \right)^2$$

avec $t_{ii} > 0$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

III.3.2. Pour $n \geqslant 2$ on identifie R^n avec le produit $\mathrm{R} \times \mathrm{R}^{n-1}$ et on note $\tilde{x}$ la projection sur R^{n-1} d'un élément x de R^n. Démontrer que, si $a_{11} > 0$ et si on pose $t_{1j} = \dfrac{a_{1j}}{\sqrt{a_{11}}}$ pour $j \in \{1, 2, ..., n\}$, il existe une unique matrice $\tilde{A}$ élément de $S_{n-1}(\mathrm{R})$ telle que :

$$\forall x \in \mathrm{R}^n, \quad Q_A(x) = \left(\sum_{i \leqslant j \leqslant n} t_{1j} x_j \right)^2 + Q_{\tilde{A}}(\tilde{x}).$$

Démontrer que, si A appartient à $S_n^+(\mathrm{R})$, alors $\tilde{A}$ existe et appartient à $S_{n-1}^+(\mathrm{R})$.

III.3.3. On considère l'algorithme suivant :

Poser $A_1 = A$.

- si $k < n$ et si le terme de la première ligne, première colonne, de A_k est strictement positif, poser $A_{k+1} = \tilde{A}_k$ et recommencer.
- sinon, arrêter.

Démontrer que A appartient à $S_n^+(\mathrm{R})$ si et seulement si l'algorithme s'arrête pour $k = n$ avec l'unique terme de A_n strictement positif. Démontrer qu'on a alors déterminé une décomposition $A = {}^t TT$ avec T triangulaire supérieure inversible.

III.4. **Exemple.**

Un entier $n \geqslant 1$ et un réel $a > 0$ étant fixés, on applique l'algorithme à la matrice symétrique $A(n; a)$ à n lignes et n colonnes dont le terme général a_{ij} vaut a si $i = j$, vaut 1 si $i = j + 1$ ou $i = j - 1$ et vaut 0 autrement.

III.4.1. Démontrer que, si on parvient à la k-ième itération, quel que soit $x \in \mathrm{R}^n$ on a :

$$Q_{A(n;a)}(x) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} \left(u_i x_i + \frac{x_{i+1}}{u_i} \right)^2 + \left(a - \frac{1}{u_k^2} \right) x_{k+1}^2 + a \sum_{k+2 \leqslant i \leqslant n} x_i^2 + 2 \sum_{k+2 \leqslant i \leqslant n} x_{i-1} x_i$$

où les u_i sont définis par $u_1 = \sqrt{a}$ et $u_i = \sqrt{a - \dfrac{1}{u_{i-1}^2}}$ pour $2 \leqslant i \leqslant k$. Démontrer qu'on a $u_1 > u_2 > ... > u_k$.

À quelle condition pourra-t-on faire une $(k + 1)$-ième itération ?

Tournez la page S.V.P.

III.4.2. Démontrer que, si $a \geqslant 2$, la matrice $A(n; a)$ appartient à $S_n^+(R)$ quel que soit n.

III.4.3. Démontrer que, si $a < 2$, il existe un entier naturel $N(a)$ tel que la matrice $A(n; a)$ appartienne à $S_n^+(R)$ si et seulement si $n \leqslant N(a)$. Calculer $N(1)$, $N(\sqrt{2})$, $N(1{,}9)$.

III.4.4. Donner l'expression de la décomposition $A(n; 2) = {}^tTT$ résultant de l'algorithme.