SESSION DE 1994

concours externe de recrutement de professeurs certifiés

section : mathématiques

première composition de mathématiques

Durée : 5 heures

L'usage d'instruments de calcul, en particulier d'une calculatrice électronique de poche — éventuellement programmable et alphanumérique — à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.

Tournez la page S.V.P.

Objet et notations du problème

Ce problème a pour objet l'étude du rayon minimum des disques d'un plan affine euclidien contenant k points à coordonnées entières.

Soit $\mathbb{Z}$ l'anneau des entiers relatif, $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels, $\mathbb{C}$ celui des nombres complexes. On note $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

Dans tout le problème, P désigne un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. On établit une bijection entre P et $\mathbb{C}$ en associant à chaque point de P son affixe dans $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ et on appelle point entier tout point de P dont l'affixe appartient à $\mathbb{Z}[i]$.

Pour $r \in \mathbb{R}$, $r \geqslant 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $M_0 \in P$, on appelle disque de centre z_0 (respectivement M_0) et de rayon r l'ensemble $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leqslant r\}$ (respectivement $D(M_0, r) = \{M \in P \mid M_0M \leqslant r\}$).

Si E est un ensemble fini, on note card(E) son cardinal et, pour tout entier k, $k \geqslant 2$, on désigne par r_k le réel, s'il existe, défini par : $r_k = \min\{r > 0 \mid \exists z_0 \in \mathbb{C},\ \mathrm{card}(\mathbb{Z}[i] \cap D(z_0, r)) \geqslant k\}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $[x]$ la partie entière de x, c'est-à-dire l'unique entier relatif vérifiant $[x] \leqslant x < [x] + 1$.

I. **Détermination de r_2, r_3 et r_4.**

I.1. Soit M et M′ deux points entiers distincts. Montrer que $MM' \geqslant 1$.
En déduire que, si M et M′ appartiennent tous deux à $D(M_0, r)$, alors $2r \geqslant 1$.

I.2. Montrer que r_2 existe et vaut $\dfrac{1}{2}$.

I.3.

I.3.1. En considérant le triangle OAB où A et B ont pour affixes respectives 1 et i, montrer que, si r_3 existe, alors $r_3 \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

I.3.2. Soit C et D deux points entiers distincts et différents de O. Montrer que l'une au moins des distances OC, OD ou CD est supérieure ou égale à $\sqrt{2}$.

I.3.3. Déterminer r_3.

I.4. Montrer que, si r_4 existe, on a $r_4 \geqslant r_3$. En considérant les points O, A, B introduits en I.3.1. et le point d'affixe $1 + i$, déterminer r_4.

II. **Quelques résultats préliminaires.**

II.1. Dans toute cette question, A, B et C désignent trois points non alignés de P. On note R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC, $\hat{A}$ la mesure comprise entre 0 et π de l'angle en A de ce triangle, a, b, c les longueurs BC, CA et AB.

II.1.1. Montrer que $R = \dfrac{a}{2 \sin \hat{A}}$.

II.1.2. Exprimer $\cos \hat{A}$, puis R^2 en fonction de a, b et c.

II.1.3. Montrer que, si A, B et C sont des points entiers, R^2 est un rationnel.

II.2. Soit $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, et $D(O, r)$ le disque de centre O et de rayon r. Le but de cette question est de montrer que la fonction définie par $r \mapsto \operatorname{card}(\mathbb{Z}[i] \cap D(O, r))/r^2$ admet une limite lorsque $r \to +\infty$ et de déterminer cette limite.

II.2.1. Montrer que, si z est l'affixe d'un point entier contenu dans $D(O, r)$, alors $-r \leqslant \operatorname{Re}(z) \leqslant r$ et $-r \leqslant \operatorname{Im}(z) \leqslant r$.

II.2.2. Soit n un entier, $0 \leqslant n \leqslant [r]$. Montrer que le nombre des points entiers d'abscisse n contenus dans $D(O, r)$ est $1 + 2\left[\sqrt{r^2 - n^2}\right]$.

II.2.3. En déduire que : $\operatorname{card}(\mathbb{Z}[i] \cap D(O, r)) = 1 + 4 \sum_{n=0}^{[r]} \left[\sqrt{r^2 - n^2}\right]$ puis que :

$$-4[r] - 3 + 4 \sum_{n=0}^{[r]} \sqrt{r^2 - n^2} \leqslant \operatorname{card}(\mathbb{Z}[i] \cap D(O, r)) \leqslant 1 + 4 \sum_{n=0}^{[r]} \sqrt{r^2 - n^2}.$$

II.2.4. Montrer que la fonction définie par $r \mapsto \sum_{n=0}^{[r]} \sqrt{r^2 - n^2}/r^2$ a pour limite $I = \int_0^1 \sqrt{1 - t^2}\, dt$ lorsque $r \to +\infty$. Calculer I et conclure.

III. Existence de r_k et rationalité de r_k^2.

Dans cette partie, k est un entier supérieur ou égal à 3.

III.1. Montrer que l'ensemble $A_k = \{ r > 0 \mid \exists z_0 \in \mathbb{C},\ \operatorname{card}(\mathbb{Z}[i] \cap D(z_0, r)) \geqslant k \}$ admet une borne inférieure strictement positive m_k.

III.2. Montrer que : pour tout entier k, $k \geqslant 3$, $m_{k+1} \geqslant m_k$.

III.3. Soit $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A_k de limite m_k.

III.3.1. Montrer qu'il existe une suite $(\zeta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes vérifiant $0 \leqslant \operatorname{Re}(\zeta_n) < 1$, $0 \leqslant \operatorname{Im}(\zeta_n) < 1$ et $\operatorname{card}(\mathbb{Z}[i] \cap D(\zeta_n, \rho_n)) \geqslant k$.

III.3.2. Montrer qu'il existe une suite extraite $(\zeta_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de la suite $(\zeta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un nombre complexe ζ.

III.3.3. Montrer que $\operatorname{card}(\mathbb{Z}[i] \cap D(\zeta, m_k)) \geqslant k$. En déduire l'existence de r_k.

III.4. Soit D_k un disque de rayon r_k contenant au moins k points entiers, ω_k son centre et Γ_k le cercle de centre ω_k et de rayon r_k.

III.4.1. Montrer que Γ_k contient au moins un point entier.

III.4.2. Montrer que, si Γ_k ne contenait qu'un point entier M_k, il existerait un point ω'_k intérieur au segment $[\omega_k, M_k]$ tel que $D(\omega'_k, \omega'_k M_k)$ contiendrait au moins k points entiers. En déduire que Γ_k contient au moins deux points entiers.

III.4.3. Montrer que, si Γ_k ne contient que deux points entiers, ils sont diamétralement opposés sur Γ_k.

III.4.4. Montrer que r_k^2 est rationnel (on utilisera II.1.3.).

III.5. **Application.**

III.5.1. Soit D_k un disque de rayon r_k contenant au moins k points entiers. Montrer qu'il existe un disque D'_k, de centre ω'_k, de rayon r_k, contenant au moins k points entiers, tel que le point O appartienne au cercle Γ'_k, de centre ω'_k, de rayon r_k, et que tous les points entiers contenus dans Γ'_k aient une ordonnée supérieure ou égale à 0.

III.5.2. Soit D'_k un disque vérifiant les propriétés précédentes. On suppose que Γ'_k ne contient que deux points entiers et que k est strictement supérieur à 4. Montrer que r_k est supérieur ou égal à 1.

III.5.3. Soit encore D'_k un disque vérifiant les propriétés précédentes. On suppose que Γ'_k contient au moins trois points entiers et que k est strictement supérieur à 4. Montrer que r_k est supérieur ou égal à 1.

III.5.4. Déterminer les valeurs de r_5 et de r_6.

Tournez la page S.V.P.

IV. Une majoration de r_k.

Soit n un entier naturel non nul.

On pose $n\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid (a, b) \in (n\mathbb{Z})^2\}$.

IV.1. Montrer que la relation définie sur $\mathbb{Z}[i]$ par :

$$(a + ib)\mathscr{R}(a' + ib') \Leftrightarrow (a + ib) - (a' + ib') \in (n\mathbb{Z})^2$$

est une relation d'équivalence.

IV.2. Quel est le cardinal de $\mathbb{Z}[i]/\mathscr{R}$?

IV.3. Montrer que, pour tout entier k, $k \geqslant 2$, πr_k^2 n'est pas un entier.

IV.4. On suppose que r est un réel positif tel que πr^2 n'est pas un entier. Montrer que, pour n assez grand, D(O, nr) contient au moins $[\pi r^2]\, n^2 + 1$ points entiers et que, parmi ces points, il en existe $[\pi r^2] + 1$ qui appartiennent à la même classe d'équivalence pour $\mathscr{R}$.

IV.5. Soit $z_0, \ldots, z_{[\pi r^2]}$ les affixes de ces $[\pi r^2] + 1$ points entiers.

IV.5.1. Montrer que $\dfrac{z_0}{n}, \ldots, \dfrac{z_{[\pi r^2]}}{n}$ sont les affixes de points de D(O, r) vérifiant :

pour tout entier j, $0 \leqslant j \leqslant [\pi r^2]$, $\dfrac{(z_j - z_0)}{n} \in \mathbb{Z}[i]$.

IV.5.2. Soit ω le point d'affixe $\dfrac{-z_0}{n}$. Montrer que le disque D(ω, r) contient au moins $[\pi r^2] + 1$ points entiers.

IV.6. Soit k un entier, $k \geqslant 2$, α un réel, $0 < \alpha < 1$, et r_α le réel positif tel que : $\pi r_\alpha^2 = k - 1 + \alpha$. Montrer que $r_k \leqslant r_\alpha$.

En déduire que : pour tout entier k, $k \geqslant 2$, $r_k \leqslant \sqrt{\dfrac{k-1}{\pi}}$.

V. Une minoration de r_k.

Dans toute cette partie, D_k désigne un disque de rayon r_k contenant au moins k points entiers, dont le centre ω_k a pour affixe z_k. On suppose de plus $0 \leqslant \mathrm{Re}(z_k) < 1$ et $0 \leqslant \mathrm{Im}(z_k) < 1$.

À tout élément $x + iy$ de $\mathbb{Z}[i]$ vérifiant $x > 0$ et $y > 0$ on associe le carré dont les sommets ont pour affixes respectives $x + iy$, $x - 1 + iy$, $x - 1 + i(y - 1)$ et $x + i(y - 1)$.

À tout élément $x + iy$ de $\mathbb{Z}[i]$ vérifiant $xy \neq 0$ on associe le carré obtenu comme image du carré construit comme ci-dessus à partir de $|x| + i\,|y|$ par la symétrie (par rapport à O ou par rapport à l'un des axes) qui transforme le point d'affixe $|x| + i\,|y|$ en le point d'affixe $x + iy$.

V.1. Montrer l'existence d'un tel disque D_k.

V.2. Soit M un point entier de D_k dont l'affixe $x + iy$ vérifie $xy \neq 0$ et $(x - 1)(y - 1) \neq 0$. Montrer que le carré associé est contenu dans D_k.

V.3. En comparant l'aire de D_k à la somme des aires des carrés ainsi définis, montrer que $\pi r_k^2 \geqslant k - 8[r_k]$.

En déduire que : pour tout entier k, $k \geqslant 2$, $r_k \geqslant \dfrac{-4 + \sqrt{16 + k\pi}}{\pi}$.

VI. Conclusion.

Montrer que r_k est équivalent à $\sqrt{\dfrac{k}{\pi}}$ lorsque $k \to +\infty$.