SESSION DE 1993

concours externe de recrutement de professeurs certifiés

section : mathématiques

première composition de mathématiques

Durée : 5 heures

L'usage d'instruments de calcul, en particulier d'une calculatrice électronique de poche — éventuellement programmable et alphanumérique — à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.

Les quatre parties du problème sont largement indépendantes.

Tournez la page S.V.P.

NOTATIONS ET OBJECTIFS DU PROBLÈME

On désigne par E l'espace vectoriel constitué des fonctions ϕ réelles, continues et bornées sur $[0, +\infty[$, et telles que, pour tout réel strictement positif x, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\,\phi(t)}{x^2+t^2}\,dt$ soit convergente.

On convient de désigner, en abrégé, par C^∞ l'espace vectoriel des fonctions réelles indéfiniment dérivables sur $]0, +\infty[$.

L'objet du problème est l'étude de l'application linéaire S qui, à tout élément ϕ de E, fait correspondre la fonction $S\phi$ définie sur $]0, +\infty[$ par $S\phi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\,\phi(t)}{x^2+t^2}\,dt$.

Les deux premières parties sont consacrées à la détermination de quelques transformées $S\phi$ et à la preuve de l'appartenance de $S\phi$ à C^∞, pour tout élément ϕ de E. Les deux autres parties étudient une suite d'endomorphismes L_n de C^∞ telle que, pour tout élément ϕ de E, et pour tout x strictement positif, on ait :

$$\lim (L_n\, S\phi(x)) = \phi(x).$$

PREMIÈRE PARTIE

I.1. **Appartenance à** E.

a. La fonction constante, égale à 1 sur $[0, +\infty[$, est-elle élément de E ?

b. Montrer que la fonction ϕ_1, définie sur $[0, +\infty[$ par $\phi_1(t) = \dfrac{t}{1+t^2}$, appartient à E.

c. Soit ψ une fonction continue sur $[0, +\infty[$, qui admet une limite finie ℓ en $+\infty$. Montrer que ψ est bornée sur $[0, +\infty[$.

Montrer que, si ℓ n'est pas nulle, ψ n'appartient pas à E. ψ appartient-elle à E si $\ell = 0$?

I.2. **Étude de** $S\phi_1$.

a. Déterminer deux nombres réels a et b tels que, pour tout couple de réels $(x, t) \neq (0, 0)$, on ait :

$$\frac{t^2(1-x^2)}{(x^2+t^2)(1+t^2)} = \frac{a}{1+t^2} + \frac{bx^2}{x^2+t^2}.$$

En déduire, pour $x \neq 1$, la valeur de $S\phi_1(x)$.

b. Calculer $S\phi_1(1)$ (on pourra faire une intégration par parties ou utiliser le changement de variable défini par $t = \tan\theta$, $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$).

c. Vérifier que $S\phi_1$ appartient à C^∞.

I.3. **Appartenance de** $S\phi$ **à** C^∞.

Dans cette question ϕ est un élément quelconque de E, k est un entier strictement positif. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on désigne par u_n la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $u_n(x) = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{t\,\phi(t)}{x^2+t^2}\,dt$.

a. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers $S\phi$.

b. Montrer que, pour tout entier n, la fonction u_n appartient à C^∞.

c. Déterminer deux nombres complexes α et β tels que, pour tout couple de réels $(x, t) \neq (0, 0)$, on ait :

$$\frac{t}{x^2 + t^2} = \frac{\alpha}{x - it} + \frac{\beta}{x + it}.$$

Utiliser cette égalité pour calculer $\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\frac{t}{x^2 + t^2}\right)$ et en déduire que, pour tout couple de réels $(x, t) \neq (0, 0)$, on a : $\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\frac{t}{x^2 + t^2}\right)\right| \leqslant \frac{k!}{(x^2 + t^2)^{\frac{(k+1)}{2}}}$.

d. On note $u_n^{(k)}$ la dérivée k-ième de la fonction u_n.
Soit a un réel strictement positif. Montrer qu'il existe une constante A_k telle que, pour tout $x \geqslant a$ et tout entier n, on ait :

$$|u_n^{(k)}(x)| \leqslant A_k \int_n^{n+1} \frac{dt}{(a^2 + t^2)^{\frac{(k+1)}{2}}}.$$

En déduire que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

e. Prouver que la fonction $S\phi$ appartient à C^∞ et que, pour tout entier $k > 0$, on a :

$$(S\phi)^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\frac{t}{x^2 + t^2}\right) \phi(t)\, dt.$$

DEUXIÈME PARTIE

Dans cette partie on étudie un exemple de détermination de $S\phi$ à l'aide d'une équation différentielle.

II.1. **Définition d'une fonction ϕ_2, élément de** E.

Soit ϕ_2 la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $\phi_2(t) = \sin t$.

Montrer que, pour tout nombre positif T, on a :

$$\int_0^T \frac{t \sin t}{x^2 + t^2}\, dt = \frac{-T\cos T}{x^2 + T^2} + \int_0^T \frac{x^2 - t^2}{(x^2 + t^2)^2} \cos t\, dt.$$

En déduire que ϕ_2 appartient à E.

II.2. **Détermination et intégration d'une équation différentielle dont $S\phi_2$ est solution.**

a. Prouver que, pour tout couple de réels $(x, t) \neq (0, 0)$, on a :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{t}{x^2 + t^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{t}{x^2 + t^2}\right) = 0.$$

b. En déduire que, sur $]0, +\infty[$, la fonction $S\phi_2$ est solution de l'équation différentielle $y'' - y = 0$ (on utilisera I.3.*e.* et on fera deux intégrations par parties successives).

c. Déterminer l'ensemble des fonctions solutions de l'équation différentielle précédente sur $]0, +\infty[$.

II.3. **Détermination explicite de $S\phi_2$.**

a. Prouver que, pour tout $x > 0$, on a :

$$\left|\int_0^{+\infty} \frac{t \sin t}{x^2 + t^2}\, dt\right| \leqslant \frac{\pi}{2x}$$

(on pourra utiliser l'égalité obtenue en II.1.). En déduire la limite de $S\phi_2(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Tournez la page S.V.P.

b. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente et que, pour tout $x > 0$, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t \sin t}{x^2 + t^2}\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x\lambda)}{\lambda(\lambda^2+1)}\,\mathrm{d}\lambda\,.$$

Déduire de cette égalité que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t \sin t}{x^2 + t^2}\,\mathrm{d}t$ a une limite finie lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures.

c. On admet sans démonstration l'égalité : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$. Expliciter la fonction $\mathrm{S}\phi_2$.

TROISIÈME PARTIE

On désigne par T l'endomorphisme de C^∞ qui à un élément f de cet espace associe l'élément $\mathrm{T}f$ défini, pour $x > 0$, par $\mathrm{T}f(x) = -xf'(x)$. L'identité de C^∞ est notée I et les puissances successives de T sont définies par $\mathrm{T}^1 = \mathrm{T}$, $\mathrm{T}^2 = \mathrm{T} \circ \mathrm{T}, \ldots, \mathrm{T}^p = \mathrm{T} \circ \mathrm{T}^{p-1}$.

Soit G l'espace vectoriel des fonctions réelles de deux variables (x, t) définies sur $]0, +\infty[\times [0, +\infty[$ et indéfiniment dérivables par rapport à la première variable. On désigne de même par T_x l'endomorphisme de G qui à un élément g de G associe l'élément $\mathrm{T}_x g$ défini, pour $(x, t) \in\,]0, +\infty[\times [0, +\infty[$, par

$$\mathrm{T}_x g(x, t) = -x \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)\,.$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $\mathrm{L}_n = \mathrm{T} \circ \left(\mathrm{I} - \frac{\mathrm{T}^2}{4}\right) \circ \left(\mathrm{I} - \frac{\mathrm{T}^2}{4.2^2}\right) \circ \ldots \left(\mathrm{I} - \frac{\mathrm{T}^2}{4\,n^2}\right)$ et on définit $\mathrm{L}_{n,x}$ en remplaçant dans cette formule T par T_x.

III.1. **Commutation de L_n et de l'intégrale.**

a. Soit k un entier strictement positif. Montrer qu'il existe k réels $\lambda_{k,i}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, tels que, pour tout élément f de C^∞ et pour tout $x > 0$, on ait :

$$\mathrm{T}^k f(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_{k,i}\, x^i f^{(i)}(x)\,.$$

En déduire que pour tout élément ϕ de E et pour tout $x > 0$, on a :

$$\mathrm{T}^k\, \mathrm{S}\phi\,(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{T}_x^k \left(\frac{t}{x^2 + t^2}\right) \phi(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

b. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, pour tout élément ϕ de E et pour tout $x > 0$, on a :

$$\mathrm{L}_n\, \mathrm{S}\phi\,(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{L}_{n,x} \left(\frac{t}{x^2 + t^2}\right) \phi(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

III.2. **Détermination de $\mathrm{L}_1\mathrm{S}\phi$.**

a. Soit f un élément de C^∞. Montrer que, pour tout $x > 0$, on a :

$$\left(\mathrm{I} - \frac{\mathrm{T}^2}{4}\right)(f)(x) = f(x) - \frac{xf'(x) + x^2 f''(x)}{4}\,.$$

b. Déduire de l'égalité précédente $\mathrm{L}_{1,x}\left(\frac{1}{x^2 + t^2}\right)$ et prouver que, pour tout $x > 0$, on a :

$$\mathrm{L}_1\, \mathrm{S}\phi\,(x) = 12 \int_0^{+\infty} \frac{x^4\, t^3}{(x^2 + t^2)^4}\, \phi(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

III.3. **Détermination de** $L_n S\phi$.

Soit u la fonction définie sur $]0, +\infty[\times [0, +\infty[$ par $u(x, t) = \dfrac{x}{x^2 + t^2}$.

a. On suppose t fixé. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour tout $x > 0$, on a :

$$\left(I - \frac{T_x}{2n}\right)(u^{2n})(x, t) = \frac{2t^2 u^{2n}(x, t)}{x^2 + t^2}.$$

Montrer ensuite que $\left(I + \dfrac{T_x}{2n}\right)\left(\dfrac{u^{2n}}{x^2 + t^2}\right)$ s'exprime simplement à l'aide de n et de u^{2n+2}.

En déduire l'expression de $\left(I - \dfrac{T_x^2}{4n^2}\right)(u^{2n})$ à l'aide de t, de n et de u^{2n+2}.

b. Établir, pour tout entier $n \geqslant 1$, pour tout $x > 0$ et pour tout élément ϕ de E, les formules :

$$L_n S\phi(x) = \frac{2(2n+1)!}{(n!)^2} \int_0^{+\infty} t^{2n+1} u^{2n+2}(x, t)\, \phi(t)\, dt$$

$$= \frac{2(2n+1)!}{(n!)^2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\lambda}{1 + \lambda^2}\right)^{2n+1} \frac{\phi(\lambda x)}{1 + \lambda^2}\, d\lambda.$$

QUATRIÈME PARTIE

Dans toute cette partie x est un nombre réel strictement positif *fixé*.

Pour tout entier $n \geqslant 0$ on pose $K_n = \dfrac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2}$.

IV.1. **Étude d'une suite d'intégrales.**

a. Prouver, pour tout entier $n \geqslant 0$, l'existence de l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(2\lambda)^{2n+1}}{(1 + \lambda^2)^{2n+2}}\, d\lambda$.

b. Montrer que, pour tout n, on a :

$$I_n - I_{n+1} = \frac{1}{2n+2} I_{n+1}$$

(on pourra utiliser le changement de variable défini par $\lambda = \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$, $\theta \in [0, \pi[$ et faire une intégration par parties).

c. Calculer I_0, I_n, et en déduire la valeur de $K_n I_n$.

Pour l'étude de la limite de $L_n S\phi(x)$, on écrit la formule obtenue à la fin de la troisième partie sous la forme :

$$L_n S\phi(x) = K_n \int_0^{+\infty} \left(\frac{2\lambda}{1 + \lambda^2}\right)^{2n+1} \frac{\phi(\lambda x) - \phi(x)}{1 + \lambda^2}\, d\lambda + K_n I_n \phi(x).$$

Tournez la page S.V.P.

IV.2. **Comportement à l'infini de** $K_n \int_0^a \left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right)^{2n+1} f(\lambda)\, d\lambda$.

Soit a un nombre réel, $0 < a < 1$, et f une fonction continue sur $[0, a]$.

a. Montrer que, pour tout réel $\theta \in]0, 1[$, $\theta^{2n+1} K_n$ a une limite nulle lorsque n tend vers $+\infty$ (on pourra considérer la série de terme général $v_n = \theta^{2n+1} K_n$ et étudier la limite du rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n}$).

b. En déduire la limite de $K_n \int_0^a \left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right)^{2n+1} f(\lambda)\, d\lambda$ lorsque n tend vers $+\infty$.

IV.3. **Comportement à l'infini de** $K_n \int_b^{+\infty} \left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right)^{2n+1} g(\lambda)\, d\lambda$.

Soit b un nombre réel, $b > 1$, et g une fonction continue sur $[0, +\infty[$ telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} |g(\lambda)|\, d\lambda$ soit convergente. Déterminer la limite de $K_n \int_b^{+\infty} \left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right)^{2n+1} g(\lambda)\, d\lambda$ lorsque n tend vers $+\infty$.

IV.4. **Détermination de lim** $L_n S\phi(x)$.

Montrer, en utilisant notamment les deux résultats précédents et la continuité de ϕ en x, que

$$K_n \int_0^{+\infty} \left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right)^{2n+1} \frac{\phi(\lambda x) - \phi(x)}{1+\lambda^2}\, d\lambda$$

a une limite nulle lorsque n tend vers $+\infty$.

En déduire le résultat annoncé dans les objectifs du problème.