SESSION DE 1992

concours externe de recrutement de professeurs certifiés

section : mathématiques

deuxième composition de mathématiques

Durée : 5 heures

L'usage d'instruments de calcul, en particulier d'une calculatrice électronique de poche — éventuellement programmable et alphanumérique — à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.

Tournez la page S.V.P.

Notations et objectifs du problème

Le plan affine euclidien orienté, noté $\mathcal{P}$, est muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R}$ d'origine O. A tout point M de coordonnées (x,y) dans $\mathcal{R}$ on associe son affixe $z = x+iy$; ceci permet d'identifier le plan à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Un point entier du plan est un point dont les coordonnées sont des entiers relatifs. L'ensemble de tous les points entiers est appelé réseau. Le réseau s'identifie à la partie de $\mathbb{C}$, notée $\mathbb{Z}[i]$ et définie par: $\mathbb{Z}[i] = \{a+ib\ ;\ (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$.

L'objectif général du problème réside en la recherche et l'étude de configurations planes soumises à des conditions mettant en jeu les entiers:

Thème A: recherche des polygones réguliers dont les sommets appartiennent au réseau;

Thème B: recherche et étude de parties du plan dont les distances mutuelles entre les points sont des entiers;

Thème C: recherche et étude de configurations contenant un nombre fixé de points du réseau.

Les notations et objectifs spécifiques à chaque thème sont précisés en en-tête de chacun d'eux. Les thèmes B et C sont indépendants et peuvent être abordés dans n'importe quel ordre. Ils dépendent de la question préliminaire du thème A.

Thème A: **Polygones réguliers à sommets entiers**

On se propose de démontrer que les seuls polygones réguliers convexes à sommets entiers sont les carrés. Pour ceci, on établit d'abord un résultat préliminaire qui sera utilisé à nouveau dans le thème B et le thème C. Dans tout ce thème A, les coordonnées des points sont définies dans $\mathcal{R}$.

A.I Question préliminaire

A.I.1 Soit θ un nombre réel, et n un entier supérieur ou égal à 1.Montrer que:

$$\cos(n+1)\theta = 2\cos\theta.\cos n\theta - \cos(n-1)\theta.$$

A.I.2 En déduire qu'il existe une suite $(P_n)_{n\geq 1}$ de polynômes tels que, pour tout n,élément de $\mathbb{N}^*$, P_n vérifie les propriétés suivantes:

- P_n est un polynôme de degré n à coefficients entiers, et unitaire (c'est-à-dire tel que le coefficient de X^n soit égal à 1).
- pour tout réel θ, $P_n(2\cos\theta) = 2\cos n\theta$.

A.I.3 Soit θ un nombre réel tel que $\frac{\theta}{\pi}$ soit rationnel.Montrer que $2\cos\theta$ est solution d'une équation de la forme

$$X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0 = 0 \qquad (1)$$

où $n \in \mathbb{N}^*$ et, pour $0 \leq i \leq n-1$, $a_i \in \mathbb{Z}$.

A.I.4 Soit θ un nombre réel. On suppose que $\frac{\theta}{\pi}$ et $\cos\theta$ sont rationnels.

Montrer que $\cos\theta \in \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$.

(On pourra commencer par montrer que toute solution rationnelle de l'équation (1) est un entier relatif) .

Tournez la page S.V.P.

A.II Application aux polygones réguliers à sommets entiers

Dans cette partie n désigne un entier supérieur ou égal à 3.On rappelle qu'une suite $(A_1, \ldots ,A_n)$ de n points distincts du plan définit un polygone régulier convexe P ayant pour sommets ces n points s'il existe une rotation r d'angle $\frac{2\pi}{n}$, ou - $\frac{2\pi}{n}$, telle que $r(A_i) = A_{i+1}$ pour $1 \leq i \leq n-1$, et $r(A_n) = A_1$. On sait qu'une telle rotation est unique. On convient d'écrire $P = (A_1, \ldots , A_n)$. Le centre Ω de la rotation r s'appelle le centre de P.

<u>A.II.1</u> Soit $P = (A_1, \ldots , A_n)$ un polygone régulier convexe dont les n sommets sont des points entiers. Soit Ω son centre.

a) Montrer que Ω est l'isobarycentre de l'ensemble des sommets de P, et en déduire que Ω est à coordonnées rationnelles.

b) En notant ω l'affixe de Ω, rappeler la représentation analytique de la rotation r de centre Ω et d'angle $\frac{2\pi}{n}$, ou - $\frac{2\pi}{n}$, au moyen des affixes.

c) En écrivant que $r(A_1) = A_2$, montrer que $\cos\frac{2\pi}{n}$ et $\sin\frac{2\pi}{n}$ sont rationnels. En déduire, au moyen de A.I.4, que n = 4, c'est-à-dire que P est un carré.

<u>A.II.2</u>. Soient A_1 et A_2 deux points entiers distincts. Montrer que les deux carrés $C = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ et $C' = (A_1, A_2, A'_3, A'_4)$ admettant A_1 et A_2 comme sommets consécutifs ont tous leurs sommets entiers. Préciser les coordonnées dans $\mathcal{R}$ de A_3, A_4, A'_3, A'_4 en fonction des coordonnées (x_1, y_1) de A_1 et (x_2, y_2) de A_2.

Thème B: **Ensembles à distances entières**

Un sous-ensemble non vide E de points du plan est appelé <u>ensemble à distances entières</u> lorsque, pour tous points A et B appartenant à E, la distance AB est un nombre entier. La partie B.I étudie quelques exemples. La partie B.II établit qu'un ensemble infini à distances entières est nécessairement contenu dans une droite. Par contre, dans la partie B.III, on montre que, pour tout entier n $(n \geq 3)$, il existe un ensemble à distances entières constitué de n points tels que trois quelconques d'entre eux ne soient pas alignés.

B.I Etude de quelques exemples

<u>B.I.1</u> Les sommets d'un carré, d'un rectangle , d'un losange peuvent-ils former un ensemble à distances entières?

<u>B.I.2</u> Soit ABC un triangle équilatéral de côté 112.

a) Justifier l'existence et l'unicité du point D défini par les conditions suivantes: AD = 73, BD = 57, D et C sont d'un même côté de la droite (AB).

b) Calculer les coordonnées x et y de D dans le repère $\mathcal{R}' = (O', \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ où O' est le milieu de [AB], $\vec{\imath} = \frac{\overrightarrow{O'A}}{\|\overrightarrow{O'A}\|}$, $\vec{\jmath} = \frac{\overrightarrow{O'C}}{\|\overrightarrow{O'C}\|}$. On observera que x est rationnel et on l'écrira sous forme d'une fraction irréductible. On observera également que $y = y_1\sqrt{3}$ où y_1 est un nombre rationnel qu'on écrira sous forme d'une fraction irréductible.

c) Montrer que E = {A , B , C , D} est un ensemble à distances entières.

B.II Ensembles infinis à distances entières

B.II.1 Soit H une hyperbole et $\mathcal{R}''$ un repère cartésien du plan dans lequel H a pour équation,

$$xy = 1.$$

Soit Γ une courbe du plan, d'équation, dans $\mathcal{R}''$,

$$a\,x^2 + b\,xy + c\,y^2 + d\,x + e\,y + f = 0,$$

où a , b , c , d , e ne sont pas tous nuls.
Montrer que, si $\Gamma \cap H$ est infini, alors $\Gamma = H$ et donner un majorant du nombre de points de $\Gamma \cap H$ lorsque $\Gamma \neq H$.

B.II.2 Soit E un ensemble à distances entières contenant trois points A, B, C non alignés. On pose $p = AB$, $q = AC$ et, pour $j \in \{0, ..., p\}$ et $k \in \{0, ..., q\}$,

$$U_j = \{M \in \mathcal{P}\ ;\ |MA-MB| = j\} \quad \text{et} \quad V_k = \{M \in \mathcal{P}\ ;\ |MA-MC| = k\}.$$

a) Préciser la nature géométrique des ensembles U_j et V_k pour $j \in \{0, ..., p\}$ et $k \in \{0, ..., q\}$. On distinguera les cas $j = 0$ et $j = p$ (resp. $k = 0$ et $k = q$) des cas $0 < j < p$ (resp. $0 < k < q$).

b) Déduire de B.II.1 que, quelque soit $j \in \{0, ..., p\}$ et $k \in \{0, ..., q\}$, $U_j \cap V_k$ est une partie finie (éventuellement vide) du plan.

c) Démontrer que $E \subset \bigcup_{0 \leq j \leq p} U_j$, et $E \subset \bigcup_{0 \leq k \leq q} V_k$, et en déduire que E est fini.

B.II.3 Etant donné un point A et un vecteur $\vec{v}$, on note $E_{A,\vec{v}}$ l'ensemble de tous les points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} = x\,\vec{v}$ avec $x \in \mathbb{Z}$.
Soit E une partie infinie du plan. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes:

(*) E est à distances entières;

(**) Il existe un point A et un vecteur $\vec{v}$ de norme 1 tels que $E \subset E_{A,\vec{v}}$.

B.III Ensembles finis à distances entières

Soit ϕ le nombre réel défini par $\cos\phi = \frac{4}{5}$, $0 < \phi < \pi$. Pour tout entier naturel p, on note M_p le point d'affixe $e^{2ip\phi}$.

B.III.1 Montrer que les points M_p, p appartenant à $\mathbb{N}$, sont deux à deux distincts.

B.III 2 Soient p et q deux entiers naturels. Prouver que la distance M_pM_q est égale à $2\,|\sin(p-q)\phi\,|$. En déduire que M_pM_q est un nombre rationnel.

B.III.3 Soit un entier n supérieur ou égal à 3. Montrer qu'il existe un ensemble à distances entières, constitué de n points, et contenu dans un cercle de centre O.

Thème C: **Configurations contenant un nombre fixé de points du réseau**

Après l'étude de quelques exemples (partie C.I), on se propose d'établir que, pour chaque entier n, n appartenant à $\mathbb{N}^*$, il existe:
- un cercle à l'intérieur duquel se trouvent exactement n points du réseau (partie C.II);
- un carré à l'intérieur duquel se trouvent exactement n points du réseau (partie C.III);

Tournez la page S.V.P.

- un cercle passant par exactement n points du réseau (partie C.IV).

Dans tout ce thème C, sauf mention expresse du contraire, les coordonnées sont définies dans le repère $\mathcal{R}$.

C.I Etude de quelques exemples

C.I.1 Construire, sans justification, mais en précisant les coordonnées de leurs centres et leurs rayons, quatre cercles C_1, C_2, C_3 et C_4 tels que, pour chaque $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, il existe exactement j points du réseau à l'intérieur de C_j.

C.I.2 Soit n appartenant à $\mathbb{N}^*$. Donner, sans justification, les coordonnées des sommets d'un carré à l'intérieur duquel se trouvent exactement n^2 points du réseau.

C.II Cercle à l'intérieur duquel se trouvent n points du réseau

C.II.1 Classification des points du réseau

a) Soit B une partie bornée du plan. Montrer que B ne contient qu'un nombre fini de points du réseau.

b) On note A le point de coordonnées $(\sqrt{2}, \frac{1}{3})$. Montrer qu'il n'existe pas deux points du réseau à la même distance de A.

En déduire qu'on peut classer les points du réseau en une suite $(M_n)_{n\geq 1}$ telle que $AM_n < AM_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

C.II.2 Application

Etant donné un entier $n \in \mathbb{N}^*$, déduire de C.II.1.b qu'il existe un cercle à l'intérieur duquel se trouvent exactement n points du réseau.

C.III Carré à l'intérieur duquel se trouvent n points du réseau

C.III.1 Définition d'une fonction sur le réseau

Soit D_1 la droite d'équation $x + y\sqrt{3} - \frac{1}{3} = 0$ et D_2 la droite d'équation $x\sqrt{3} - y - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$.

a) Montrer que D_1 et D_2 sont perpendiculaires, préciser les coordonnées de leur point d'intersection Ω, et représenter graphiquement ces deux droites.

b) On pose $X = \frac{1}{2}(x\sqrt{3} - y - \frac{1}{\sqrt{3}})$, $Y = \frac{1}{2}(x + y\sqrt{3} - \frac{1}{3})$. Montrer qu'on définit ainsi un changement de repère orthonormé direct dans lequel les nouveaux axes sont portés respectivement par D_1 et D_2

Soit M un point du plan. On note (x, y) ses coordonnées dans $\mathcal{R}$ et (X, Y) ses coordonnées dans le repère précédent et on pose

$$f(M) = |X| + |Y| = \frac{1}{2}\left|x\sqrt{3} - y - \frac{1}{\sqrt{3}}\right| + \frac{1}{2}\left|x + y\sqrt{3} - \frac{1}{3}\right|.$$

C.III.2 Injectivité de la fonction f

On considère deux points M_1 et M_2 du réseau, de coordonnées respectives (x_1, y_1), (x_2, y_2) dans $\mathcal{R}$, tels que $f(M_1) = f(M_2)$.

a) Montrer qu'il existe quatre nombres réels α, β, γ, δ vérifiant $\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = \delta^2 = 1$ et tels que $\alpha x_1 + \beta y_1 - \gamma x_2 - \delta y_2 + \frac{\gamma - \alpha}{3} = 0$, $\beta x_1 - \alpha y_1 - \delta x_2 + \gamma y_2 + \frac{\delta - \beta}{3} = 0$.(On pourra observer que, pour tout réel x, on a $|x| = \lambda x$ avec $\lambda^2 = 1$)

b) En déduire que $M_1 = M_2$.(On pourra commencer par montrer que $\gamma - \alpha = \delta - \beta = 0$)

C.III.3 Nouvelle classification des points du réseau

Montrer, en utilisant la même méthode qu'en C.II.1, que l'on peut classer les points du réseau en une suite $(N_n)_{n\geq 1}$ telle que $f(N_n) < f(N_{n+1})$ pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$.

C.III.4 Soit un réel a strictement positif. Montrer que l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (X, Y) vérifient $|X| + |Y| < a$ est l'intérieur d'un carré C_a dont on précisera les sommets.
En déduire que pour tout entier n appartenant à $\mathbb{N}^*$, il existe un carré C_a dont l'intérieur contient exactement n points du réseau.

C.IV Cercle passant par n points du réseau

C.IV.1 Nombre de solutions entières de l'équation $x^2 + y^2 = 5^n$

Soit un entier n appartenant à $\mathbb{N}$. On lui associe les deux ensembles suivants:

$\mathcal{E}_n = \{(x, y) \in \mathbb{Z} x \mathbb{Z} \ ; \ x^2 + y^2 = 5^n\}$

$E_n = \{z \in \mathbb{Z}[i] \ ; \ |z|^2 = 5^n\}$

a) Montrer que $\mathcal{E}_n$ et E_n sont des ensembles finis de même cardinal.

b) Déterminer E_0.

Pour tout élément ω de E_0 et tout entier p tel que $0 \leq p \leq n$, on pose

$$Z_{\omega,p} = \omega\,(2 + i)^p\,(2 - i)^{n-p}.$$

c) Prouver que $Z_{\omega,p}$ appartient à E_n et que l'application $(\omega, p) \to Z_{\omega,p}$, de $E_0 x\{0, ..., n\}$ dans E_n, est injective.(On pourra montrer que, si $Z_{\omega,p} = Z_{\omega',q}$ avec ω et ω' éléments de E_0 et p et q entiers inférieurs ou égaux à n, alors $\left(\frac{2+i}{2-i}\right)^{4(p-q)} = 1$ et utiliser A.I.4)

d) Soit $z = x + iy$ un élément de E_n, avec $n \geq 1$. Montrer que (x, y) vérifie l'un des systèmes de relations suivants:

(1) $\begin{cases} 2x - y \equiv 0 \pmod 5 \\ x + 2y \equiv 0 \pmod 5 \end{cases}$ ou (2) $\begin{cases} 2x + y \equiv 0 \pmod 5 \\ -x + 2y \equiv 0 \pmod 5 \end{cases}$

En déduire que l'un des deux nombres $\frac{z}{2+i}$ ou $\frac{z}{2-i}$ appartient à E_{n-1}.

e) Prouver que l'application $(\omega, p) \to Z_{\omega,p}$, de $E_0 x\{0, ..., n\}$ dans E_n, est bijective. En déduire le nombre d'éléments de $\mathcal{E}_n$.

C.IV.2 Cercle passant par un nombre pair de points du réseau

a) On pose, pour chaque entier n appartenant à $\mathbb{N}^*$, $A_n = \{(x, y) \in \mathscr{E}_n$; x pair et y impair $\}$ et $B_n = \{(x, y) \in \mathscr{E}_n$; x impair et y pair $\}$.
Montrer que A_n et B_n ont le même cardinal et que $\mathscr{E}_n = A_n \cup B_n$ et $A_n \cap B_n = \emptyset$.
b) Soit un entier k de $\mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre de points du réseau appartenant au cercle de centre le point de coordonnées $(\frac{1}{2}, 0)$ et de rayon $\frac{1}{2}.5^{\frac{k-1}{2}}$.

C.IV.3 Cercle passant par un nombre impair de points du réseau

Soient un entier k de $\mathbb{N}^*$ et Γ_k le cercle de centre le point de coordonnées $(\frac{1}{3}, 0)$ et de rayon $\frac{1}{3}.5^k$.

a) Montrer que le nombre de points du réseau appartenant à Γ_k est égal au cardinal de l'ensemble F_k défini par $F_k = \{z = x + iy \; ; z \in E_{2k}, x \equiv -1 \pmod 3, y \equiv 0 \pmod 3\}$.

Les questions b, c et d ont pour objet de calculer le cardinal de F_k.

b) Montrer que quels que soient $\omega \in E_0$ et $z \in E_{2k}$, ωz et $\omega \bar{z}$ appartiennent à E_{2k}. Prouver alors que la relation (R), définie sur E_{2k} par:
"Pour z et z' dans E_{2k}, on a z(R)z' si, et seulement si, il existe $\omega \in E_0$ tel que $z' = \omega z$ ou tel que $z' = \omega \bar{z}$ "
est une relation d'équivalence sur E_{2k}.

On désigne par (R)(z) la classe d'équivalence d'un élément z de E_{2k}.

c) Soit $z = x + iy$ un élément de E_{2k}.
- On suppose $xy \neq 0$. Expliciter les éléments de (R)(z) en fonction de x et de y et montrer que $(R)(z) \cap F_k$ possède deux éléments.
- On suppose $xy = 0$. Expliciter les éléments de (R)(z) et montrer que $(R)(z) \cap F_k$ possède un élément.

d) En déduire que F_k possède 2k+1 éléments.