66.0.1 J. 1126

SESSION DE 1992

concours externe de recrutement de professeurs certifiés

section : mathématiques

première composition de mathématiques

Durée : 5 heures

L'usage d'instruments de calcul, en particulier d'une calculatrice électronique de poche — éventuellement programmable et alphanumérique — à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.

Les cinq parties du problème sont largement indépendantes.

Tournez la page S.V.P.

NOTATIONS ET OBJECTIFS DU PROBLÈME

On pose, pour tout entier N supérieur ou égal à 2 et pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$:

$$R_N(x, y) = \sum_{1 \leqslant m \leqslant N} m^y \cos(x \ln m)$$

et

$$I_N(x, y) = \sum_{1 \leqslant m \leqslant N} m^y \sin(x \ln m)$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

En considérant un plan affine rapporté à un repère orthogonal, on désigne par C_N (respectivement C'_N) la courbe définie par l'équation cartésienne $R_N(x, y) = 0$ (respectivement $I_N(x, y) = 0$). On se propose d'étudier quelques propriétés des courbes C_N et C'_N.

Pour simplifier les écritures, on pourra poser :

$$\alpha = \frac{\pi}{\ln 2}, \quad \beta = \frac{\pi}{\ln 3}, \quad \text{et } \lambda = \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

I. Cas où N = 2.

I.1. *a.* Déterminer l'ensemble D_2 des nombres réels x pour lesquels $\cos(x \ln 2)$ est strictement négatif.

b. Montrer que $R_2(x, y) = 0$ si et seulement si x appartient à D_2 et

$$y = -\frac{1}{\ln 2} \ln(-\cos(x \ln 2)).$$

I.2. On définit, pour tout x appartenant à D_2 :

$$f(x) = \frac{1}{\ln 2} \ln(-\cos(x \ln 2)).$$

a. Montrer que f est dérivable dans D_2 et calculer sa dérivée.

b. Étudier la fonction f dans l'intervalle $\left]\frac{\pi}{2\ln 2}, \frac{3\pi}{2\ln 2}\right[$ (symétrie, tableau de variations, branches infinies et allure de la courbe représentative c_2).

c. Comment C_2 se déduit-elle de c_2 ?

I.3. Déterminer C'_2, c'est-à-dire l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient $I_2(x, y) = 0$.

II. Étude de C'_3.

On désigne par A l'ensemble des nombres réels de la forme $\frac{k\pi}{\ln 2}$ où k appartient à $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, par B l'ensemble des nombres réels de la forme $\frac{h\pi}{\ln 3}$ où h appartient à $\mathbb{N}^*$ et par D_3 l'ensemble des nombres réels positifs x vérifiant l'inégalité : $\sin(x \ln 2) \sin(x \ln 3) < 0$.

II.1. *a.* Démontrer que $\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$ est irrationnel. En déduire que $A \cap B$ est vide.

b. Déterminer l'ensemble $D_3 \cap \left]0, \dfrac{4\pi}{\ln 3}\right[$.

II.2. *a.* Soit (x, y) un point de $\mathbb{R}^2$ tel que $x \neq 0$ et $I_3(x, y) = 0$.
Montrer qu'alors $\sin(x \ln 2)$ et $\sin(x \ln 3)$ sont non nuls.

b. Soit $x > 0$; montrer que $I_3(x, y) = 0$ si et seulement si x appartient à D_3 et $y = g(x)$ où g est la fonction définie sur D_3 par :

$$g(x) = \frac{1}{\ln \frac{3}{2}} \ln\left(-\frac{\sin(x \ln 2)}{\sin(x \ln 3)}\right).$$

II.3. *a.* Trouver les zéros de g sur chacun des deux intervalles suivants :

$$J_1 = \left]\frac{\pi}{\ln 3}, \frac{\pi}{\ln 2}\right[\quad \text{et} \quad J_2 = \left]\frac{2\pi}{\ln 3}, \frac{3\pi}{\ln 3}\right[.$$

b. Calculer les limites de g aux bornes de J_1. Démontrer que l'image de J_1 par g est $\mathbb{R}$.

c. Calculer la dérivée g' de g. Représenter graphiquement les fonctions $x \longmapsto \ln 2 \cot(x \ln 2)$ et $x \longmapsto \ln 3 \cot(x \ln 3)$ sur l'intervalle J_1.
Déterminer le signe de g' dans l'intervalle J_1.

d. Tracer la courbe représentative de la restriction de g à l'intervalle J_1.

e. Calculer les limites de g aux bornes de J_2. Démontrer, sans utiliser la dérivée de g, que g a un minimum strictement négatif sur J_2.

III. Intersection de C_3 avec la droite d'équation $y = 1$.

A. *Un algorithme de calcul approché d'un zéro d'une fonction.*

Soient x_0 et b deux nombres réels vérifiant $x_0 < b$ et soit f une fonction à valeurs réelles, de classe C^1 sur l'intervalle $[x_0, b[$. On suppose que l'on a $f(x_0) > 0$ et que f ne reste pas strictement positive. On suppose aussi que f' est bornée sur $[x_0, b[$ et n'est constante sur aucun intervalle de longueur non nulle.
Soit M_0 un majorant de $|f'|$; on pose enfin, pour tout x de $[x_0, b[$:

$$M(x) = \operatorname{Max}\{|f'(t)| ; t \in [x_0, x]\}.$$

A.1. Soient a et x deux nombres réels vérifiant $x_0 \leqslant a < x < b$ et tels que $f(t) > 0$ pour tout t appartenant à $[x_0, a]$.

a. Montrer que $\displaystyle\int_a^x |f'(t)|\, dt < (x - a) M(x)$.

b. Montrer que $|f(x) - f(a)| < (x - a) M(x)$.

c. Montrer que si $x - a \leqslant \dfrac{f(a)}{M_0}$ alors $f(x) > \left(1 - \dfrac{M(x)}{M_0}\right) f(a)$.

d. On pose $c = a + \dfrac{f(a)}{M_0}$. Montrer que pour tout x' appartenant à $[a, c]$ on a $f(x') > 0$ (on vérifiera d'abord que c appartient à l'intervalle $]a, b[$).

Tournez la page S.V.P.

A.2. *a.* Montrer que la relation de récurrence :

$$x_{n+1} = x_n + \frac{f(x_n)}{M_0}, \qquad \text{pour } n \in \mathbb{N},$$

permet de définir une (unique) suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ de $[x_0, b[$ et que cette suite est croissante.

b. Montrer que cette suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ converge vers un nombre x_* appartenant à l'intervalle $]a, b[$ tel que $f(x_*) = 0$ et $f(x) > 0$ pour tout x de $[x_0, x_*[$.

B. *Une application.*

On pose $r(x) = R_3(x, 1)$.

B.1. *a.* Étudier les variations de la fonction r sur $\left[0, \dfrac{\pi}{\ln 3}\right]$ et montrer que r admet un zéro et un seul sur ce même intervalle.

b. Vérifier que les hypothèses du début du A sont satisfaites pour :

$$x_0 = 0, \quad b = \frac{\pi}{\ln 3}, \quad f = r \quad \text{et} \quad M_0 = 5.$$

c. Calculer à la machine des valeurs approchées de x_5, x_6, x_7, x_8. Donner une valeur approchée du zéro x_* de r à 10^{-4} près : on justifiera le résultat.

B.2. *a.* Étudier le signe de r en chaque point $\dfrac{k\pi}{\ln 3}$, avec k entier naturel. Montrer que la fonction r admet une infinité de zéros.

b. Montrer que les zéros de r sont isolés : on pourra démontrer d'abord que la fonction r et ses dérivées successives ne peuvent s'annuler toutes simultanément.

c. Montrer que les zéros positifs de r forment un ensemble dénombrable.

IV. Droites séparatrices d'arcs de C_N.

Soit N un entier supérieur ou égal à 2.

IV.1. *a.* Soit ξ un nombre réel. Démontrer que de toute suite de nombres réels $(u_n)_{n \geqslant 0}$ on peut extraire une suite $(v_k)_{k \geqslant 0}$ telle que la suite :

$$(\exp(2i\pi v_k \xi))_{k \geqslant 0}$$

soit convergente.

b. En déduire que si $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ sont des nombres réels donnés, de toute suite réelle $(u_n)_{n \geqslant 0}$ on peut extraire une suite $(v_k)_{k \geqslant 0}$ telle que chacune des suites :

$$(\exp(2i\pi v_k \xi_j))_{k \geqslant 0}, \qquad j = 1, 2, \dots, N,$$

soit convergente. Montrer qu'alors, pour $j = 1, 2, \dots, N$, on a :

$$\lim_{k \to +\infty} \cos 2\pi(v_{k+1} - v_k)\xi_j = 1.$$

IV.2. En déduire qu'il existe une suite réelle $(x_k)_{k \geqslant 0}$ tendant vers $+\infty$ telle que $R_N(x_k, y) > 0$ pour tout y réel.

IV.3. Il existe donc une infinité de droites parallèles à l'axe des y ne contenant aucun point de la courbe C_N ; de telles droites sont appelées droites séparatrices d'arcs de C_N. Donner, dans le cas $N = 2$, une famille infinie de telles droites.

V. **Asymptotes de C_N et de C'_N.**

V.1. Soit $y_0 \leqslant -2$. Démontrer l'inégalité :

$$S_N = \sum_{2 \leqslant n \leqslant N} n^{y_0} \leqslant 2^{y_0} + \frac{N^{y_0+1} - 2^{y_0+1}}{y_0+1}.$$

En déduire que l'on a $S_N \leqslant \frac{3}{4}$ et enfin $R_N(x, y_0) \geqslant \frac{1}{4}$ pour tout x réel. Que peut-on en conclure pour C_N ?

V.2. On suppose qu'il existe deux nombres réels a et b, avec $a < b$, et une fonction $\varphi :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ indéfiniment dérivable telle que $R_N(x, \varphi(x)) = 0$ pour tout x de $]a, b[$ et telle que :

$$\lim_{x \to a_+} \varphi(x) = \lim_{x \to b_-} \varphi(x) = +\infty.$$

Démontrer que $\lim\limits_{x \to a_+} \cos(x \ln N) = 0$. En déduire qu'il existe deux entiers relatifs h et k tels que :

$$a = \frac{(2h+1)\pi}{2 \ln N} \quad \text{et} \quad b = \frac{(2k+1)\pi}{2 \ln N}.$$

V.3. On suppose qu'il existe deux nombres réels c et d, avec $c < d$, et une fonction $\psi :]c, d[\longrightarrow \mathbb{R}$ indéfiniment dérivable telle que $I_N(x, \psi(x)) = 0$ pour tout x de $]c, d[$ et telle que :

$$\lim_{x \to c_+} \psi(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to d_-} |\psi(x)| = +\infty.$$

a. Démontrer qu'il existe un entier relatif h tel que $c = \frac{h\pi}{\ln N}$

b. Démontrer qu'il existe un entier relatif k tel que :

$$d = \frac{k\pi}{\ln N} \quad \text{si} \quad \lim_{x \to d_-} \psi(x) = +\infty$$

$$d = \frac{k\pi}{\ln 2} \quad \text{si} \quad \lim_{x \to d_-} \psi(x) = -\infty.$$

V.4. Interpréter les résultats des questions V.2. et V.3. dans les cas qui ont été étudiés dans les parties I. et II. du problème.