concours externe
de recrutement de professeurs certifiés

première composition de mathématiques

L'usage d'instruments de calcul, en particulier d'une calculatrice électronique de poche – éventuellement programmable et alphanumérique – à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.

Les parties **A, B** *et* **C** *sont indépendantes.*

Tournez la page S.V.P.

Notations et objectifs du problème

On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et par $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls. Soit n un entier supérieur ou égal à un, on dit qu'une fonction réelle f définie sur un intervalle $I = (a,b)$ de $\mathbb{R}$ est de classe C^n sur I si f est n fois continûment dérivable sur I et on note $f^{(m)}$ la dérivée d'ordre m de f avec $0 \le m \le n$ et les conventions usuelles $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$ et $f^{(2)} = f''$.

On désigne par $N_{\infty,I}(f)$ et $N_{2,I}(f)$ les nombres (lorsqu'ils ont un sens):

$$N_{\infty,I}(f) = \sup_{x \in I} |f(x)| \quad \text{et} \quad N_{2,I}(f) = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Le problème est centré sur les estimations des dérivées intermédiaires $f^{(m)}$ à l'aide de f et $f^{(n)}$ pour les normes $N_{\infty,I}$ et $N_{2,I}$ et quelques applications. En particulier, la partie C établit une condition suffisante (qui est aussi nécessaire) sur les dérivées $f^{(k_j)}$, pour une suite d'entiers (k_j) strictement croissante, pour qu'une fonction indéfiniment dérivable soit développable en série entière au voisinage de chaque point d'un intervalle.

A. *Estimations de la dérivée première d'une fonction de classe C^2*

I. Estimation ponctuelle pour le cas des fonctions de classe C^2 positives.

Dans toute cette partie A.I, f désigne une fonction positive de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et telle que f'' soit bornée sur $\mathbb{R}$.

I.1.Estimation ponctuelle de f'.

a.Montrer, en appliquant la formule de Taylor avec reste de Lagrange à la fonction f que, pour tout $(x,\lambda) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$: $f(x) + \lambda f'(x) + \frac{\lambda^2}{2} N_{\infty,\mathbb{R}}(f'') \ge 0$.

b.En déduire que, pour tout réel x:

(1) $\quad |f'(x)| \le \sqrt{2 N_{\infty,\mathbb{R}}(f'').f(x)}$.

I.2.Application: On pose $g = \sqrt{f}$.

a.Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable en tout point x où $f(x) \neq 0$.

b.Soit x_0 un réel tel que $f(x_0) = 0$.

1.Déduire de (1) que $f'(x_0) = 0$.

2.Montrer que $f''(x_0) \ge 0$.(En étudiant les variations de f au voisinage de x_0, on remarquera que si $f''(x_0)$ était strictement négatif, f prendrait des valeurs strictement négatives)

3.Montrer que, pour tout réel x, $x \neq x_0$, il existe un réel c, compris entre x_0 et x tel que $f(x) = \frac{1}{2}(x-x_0)^2 f''(c)$.

En déduire que si $f''(x_0) > 0$, g n'est pas dérivable en x_0.

c.Soit x_0 un réel tel que $f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ et soit r un réel strictement positif. On note I_r l'intervalle $[x_0-r, x_0+r]$, I_{2r} l'intervalle $[x_0-2r, x_0+2r]$ et $M_r(f'') = N_{\infty,I_{2r}}(f'')$. On suppose que $M_r(f'') \neq 0$.

1.Montrer que, pour tout x appartenant à I_r, $|f'(x)| \le r.M_r(f'')$.

2.Soit x un élément de I_r. Montrer que, si $2M_r(f'').f(x) < [f'(x)]^2$, le trinôme en λ, $\tau(\lambda) = f(x) + \lambda f'(x) + \frac{\lambda^2}{2} M_r(f'')$, admettrait deux racines distinctes λ_1 et λ_2 telles que $\mu = \frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2)$ appartienne à l'intervalle $[-r, r]$ et que $f(x+\mu) \le \tau(\mu) < 0$.

En déduire que, pour tout x appartenant à I_r, $|f'(x)| \le \sqrt{2M_r(f'').f(x)}$.

d.Déduire des questions précédentes que, si f est une fonction positive de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que f'' s'annule en tous les zéros de f (s'il en existe), alors $g = \sqrt{f}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

II.Estimation en norme uniforme sur la demi-droite $\mathbb{R}_+$.

II.1.Soit I un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}_+$, de longueur 2r, avec $r > 0$, et soit f une fonction réelle de classe C^2 sur I .

A l'aide de la formule de Taylor avec reste de Lagrange, appliquée à la fonction f en l'un des deux couples (x,x+r) ou (x,x-r), montrer que, pour tout élément x de I,

$$|f'(x)| \le \frac{2}{r} N_{\infty,I}(f) + \frac{r}{2} N_{\infty,I}(f'').$$

En déduire que:

(2) $\quad N_{\infty,I}(f') \le \frac{2}{r} N_{\infty,I}(f) + \frac{r}{2} N_{\infty,I}(f'')$.

II.2.Application 1: Soit f une fonction réelle de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$; on suppose que f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.

a.Déduire de la question précédente que f' est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et que, pour tout $r > 0$,

(3) $\quad N_{\infty,\mathbb{R}_+}(f') \le \frac{2}{r} N_{\infty,\mathbb{R}_+}(f) + \frac{r}{2} N_{\infty,\mathbb{R}_+}(f'')$.

b.En minimisant le second membre de (3) par rapport à $r > 0$, montrer que:

(4) $\quad N_{\infty,\mathbb{R}_+}(f') \le 2\sqrt{N_{\infty,\mathbb{R}_+}(f).N_{\infty,\mathbb{R}_+}(f'')}$.

II.3.Application 2: Soient a et b deux fonctions réelles sur $\mathbb{R}_+$, bornées respectivement par A et B sur $\mathbb{R}_+$. On considère l'équation différentielle:

(E) $\quad y''(x) + a(x)\,y'(x) + b(x)\,y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}_+$.

a.En utilisant (2), montrer que si f est une solution de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$ de (E), pour tout réel $r > 0$ et tout intervalle I de longueur 2r contenu dans $\mathbb{R}_+$, on a:

$$\left(1-\frac{r}{2}A\right) N_{\infty,I}(f') \le \left(\frac{2}{r}+\frac{r}{2}B\right) N_{\infty,I}(f).$$

b. En déduire que si f est une solution bornée de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$ de (E), alors f' et f'' sont aussi bornées sur $\mathbb{R}_+$.

B. Estimation optimale en norme quadratique de la dérivée d'une fonction de classe C^2 sur la demi-droite $\mathbb{R}_+$

I. Préliminaires.

I.1 Soient f et g deux fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}_+$ telles que les intégrales $\int_0^{+\infty} [f(t)]^2 dt$ et $\int_0^{+\infty} [g(t)]^2 dt$ soient convergentes. Montrer, à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)g(t)dt$ est absolument convergente.

I.2. Soit f une fonction réelle, continue sur $\mathbb{R}_+$, et ayant une limite ℓ (finie ou non) quand x tend vers $+\infty$. Montrer que, si l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est convergente, alors $\ell = 0$.

I.3. Déterminer toutes les fonctions réelles de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant:

$$\begin{cases} f''+f'+f = 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+, \\ f(0)+f'(0) = 0. \end{cases}$$

Pour une telle fonction, étudier la convergence des intégrales $\int_0^{+\infty} [f(t)]^2 dt$ et $\int_0^{+\infty} [f''(t)]^2 dt$.

II. Estimation en norme quadratique de la dérivée d'une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$.

Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$ telle que les intégrales $\int_0^{+\infty} [f(t)]^2 dt$ et $\int_0^{+\infty} [f''(t)]^2 dt$ soient convergentes.

II.1. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\, f''(t)\, dt$ est convergente.

II.2. Montrer que, pour tous x, X et Y appartenant à $\mathbb{R}_+$:

(5 $\qquad \int_0^x [f'(t)]^2 dt = f(x)\, f'(x) - f(0)\, f'(0) - \int_0^x f(t) f''(t)\, dt$;

(6) $\qquad \int_X^Y f(t)\, f'(t)\, dt = \frac{1}{2}\left([f(Y)]^2 - [f(X)]^2\right)$.

II.3. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} [f'(t)]^2 dt$ est convergente. (Pour cela, on montrera, en utilisant (5) et (6), que si cette intégrale était divergente, on aurait alors $\lim_{x\to+\infty} [f(x)\, f'(x)] = +\infty$, et par suite $\lim_{x\to+\infty} [f(x)]^2 = +\infty$)

II.4. Déduire de ce qui précède que:

(i) les intégrales $\int_0^{+\infty} f(t)\, f'(t)\, dt$ et $\int_0^{+\infty} f'(t)\, f''(t)\, dt$ sont convergentes;

(ii) $\lim_{x\to+\infty} [f(x)\, f'(x)] = \lim_{x\to+\infty} [f(x)]^2 = \lim_{x\to+\infty} [f'(x)]^2 = 0$.

II.5. Montrer que, pour tout t appartenant à $\mathbb{R}_+$:

$[f(t) + f'(t) + f''(t)]^2 - \left([f(t)]^2 + [f''(t)]^2 - [f'(t)]^2\right) = \left([f + f']^2\right)'(t)$.

En déduire que:

$$\int_0^{+\infty} [f(t)]^2 dt + \int_0^{+\infty} [f''(t)]^2 dt - \int_0^{+\infty} [f'(t)]^2 dt = [f(0) + f'(0)]^2 + \int_0^{+\infty} [f(t) + f'(t) + f''(t)]^2 dt,$$

et que:

(7) $\qquad [N_{2,\mathbb{R}_+}(f')]^2 \leq [N_{2,\mathbb{R}_+}(f)]^2 + [N_{2,\mathbb{R}_+}(f'')]^2$.

II.6. En considérant, pour tout nombre réel λ strictement positif, les fonctions f_λ définies par $f_\lambda(x) = \sqrt{\lambda} f(\lambda x)$, déduire de (7) que:

$$[N_{2,\mathbb{R}_+}(f')]^2 \leq \frac{1}{\lambda^2} [N_{2,\mathbb{R}_+}(f)]^2 + \lambda^2 [N_{2,\mathbb{R}_+}(f'')]^2.$$

En déduire que:

(8) $\qquad N_{2,\mathbb{R}_+}(f') \leq \sqrt{2\, N_{2,\mathbb{R}_+}(f).N_{2,\mathbb{R}_+}(f'')}$.

II.7. Déduire de B.I.3 que (8) est optimale pour les fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$.

C. Estimation en norme quadratique des dérivées intermédiaires d'une fonction de classe C^n, $n \geq 2$

Dans toute la suite du problème, I et J désignent respectivement les intervalles $I = [-1, +1]$ et $J = [-2, +2]$ et, pour toute fonction $u: J \to \mathbb{R}$, on note $\tilde{u}$ sa restriction à I.

On rappelle, pour une fonction réelle u de classe C^n sur J, la formule de Taylor avec reste intégral: pour tous x et y appartenant à J,

$$u(y) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(y-x)^k}{k!} u^{(k)}(x) + \frac{1}{(n-1)!} \int_x^y (y-t)^{n-1} u^{(n)}(t)\, dt.$$

I. Préliminaires.

I.1. <u>Estimation de n^n</u>.

En utilisant le développement en série entière de la fonction exponentielle $x \to e^x$, montrer que, pour tout entier $n \geq 1$: $n^n \leq n!\, e^n$.

I.2.Comportement local d'un opérateur intégral.

Soient g et h deux fonctions continues réelles sur l'intervalle J et soit p un entier positif ou nul.On désigne par u la fonction définie sur J par $u(x) = \int_{-2}^{x} (x-t)^p\, g(t)\, h(t)\, dt$.

En utilisant notamment l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à J:

$$|u(x)| \leq \frac{(x+2)^{p+1/2}}{\sqrt{2p+1}} N_{2,J}(g)\, N_{\infty,J}(h).$$

En déduire que:

$$N_{2,I}(\tilde{u}) \leq \frac{3^{p+1}}{2p+1} N_{2,J}(g)\, N_{\infty,J}(h).$$

II.Construction d'une suite de fonctions du type de Mandelbrojt.

Soit Ψ une fonction réelle, positive, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors de l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(t)\, dt = 1$.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.On considère la fonction Ψ_n définie sur $\mathbb{R}$ par $\Psi_n(x) = n\Psi(nx)$; il est immédiat que Ψ_n est positive, de classe C^∞, nulle en dehors de l'intervalle $[-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}]$ et vérifie: $\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_n(t)\, dt = 1$.

On considère la suite de fonctions $(\varphi_r)_{1 \leq r \leq n}$ définies sur $\mathbb{R}$ par:

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = \displaystyle\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \Psi_n(x-t)\, dt \\ \varphi_{r+1}(x) = \displaystyle\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \Psi_n(t)\, \varphi_r(x-t)\, dt \text{ pour } 1 \leq r \leq n-1. \end{cases}$$

II.1.Montrer, par récurrence sur r, que chaque φ_r, $1 \leq r \leq n$, est une fonction positive et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

II.2.Etant donné un entier r, avec $1 \leq r \leq n$, et un entier s, avec $0 \leq s \leq r$, montrer, par récurrence sur r, que: $N_{\infty,\mathbb{R}}(\varphi_r^{(s)}) \leq (nC_1)^s$

avec $C_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi'(t)|\, dt$ et, par convention, $(nC_1)^0 = 1$.

II.3.Montrer que chaque φ_r, $1 \leq r \leq n$, est nulle en dehors de l'intervalle $[-\frac{3}{2} - \frac{r}{2n}, \frac{3}{2} + \frac{r}{2n}]$ et égale à 1 sur l'intervalle $[-\frac{3}{2} + \frac{r}{2n}, \frac{3}{2} - \frac{r}{2n}]$.

III.Estimation des dérivées intermédiaires d'une fonction de classe C^n.

Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et m un entier avec $0 \leq m \leq n-1$; on note φ la fonction φ_n construite dans la partie précédente C.II.

Soit f une fonction réelle de classe C^n sur J.

Pour chaque entier k tel que $0 \leq k \leq n$, on note F_k la fonction définie sur J par:

$$F_k(x) = \frac{1}{(n-m-1)!} \int_{-2}^{x} (x-t)^{n-m-1} \varphi^{(n-k)}(t)\, f^{(k)}(t)\, dt.$$

III.1.Majoration de $N_{2,I}(\widetilde{f^{(m)}})$ au moyen des $N_{2,I}(\tilde{F}_k)$.

a.Montrer que, pour tout x appartenant à I, $f^{(m)}(x) = (\varphi f)^{(m)}(x)$.

b.Montrer que, pour tout x appartenant à J:

$$(\varphi f)^{(m)}(x) = \frac{1}{(n-m-1)!} \int_{-2}^{x} (x-t)^{n-m-1} (\varphi f)^{(n)}(t)\, dt.$$

c.En désignant par $\binom{n}{k}$ le coefficient binomial $\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$, déduire de **C.III.1a** et **C.III.1b** que:

$$(9) \qquad N_{2,I}(\widetilde{f^{(m)}}) \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N_{2,I}(\tilde{F}_k).$$

III.2.Majoration de $N_{2,I}(\tilde{F}_n)$.Montrer, en utilisant **C.I.2** que:

$$(10) \qquad N_{2,I}(\tilde{F}_n) \leq \frac{3^{n-m}}{(n-m)!} N_{2,J}(f^{(n)}).$$

III.3.Majoration de $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} N_{2,I}(\tilde{F}_k)$.

a.Etant donné un entier k, avec $0 \leq k \leq n-1$, et un réel x de I, montrer, à l'aide de **C.II.3** que:

$$F_k(x) = \frac{(-1)^k}{(n-m-1)!} \int_{-2}^{x} [(x-t)^{n-m-1} \varphi^{(n-k)}]^{(k)}(t)\, f(t)\, dt.$$

En déduire que:

$$F_k(x) = (-1)^k \sum_{\ell=0}^{q} \frac{\binom{k}{\ell}}{(n-m-\ell-1)!} \int_{-2}^{x} (x-t)^{n-m-\ell-1} \varphi^{(n-\ell)}(t)\, f(t)\, dt$$

où q = Min (k,n-m-1), puis, à l'aide de **C.II.2** que:

$$(11) \qquad N_{2,I}(\tilde{F}_k) \leq \Big[\sum_{\ell=0}^{q} \frac{\binom{k}{\ell}}{(n-m-\ell)!} 3^{n-m-\ell} (nC_1)^{n-\ell} \Big] . N_{2,J}(f).$$

b.En observant que $\binom{n}{m} \leq 2^n$ et en utilisant **C.I.1**, montrer que: $n^n \leq (2e)^n\, m!\, (n-m)!$.

En déduire, compte tenu de (11) et de l'inégalité $n^{-\ell} \leq \frac{1}{\ell!}$ pour $0 \leq \ell \leq n$, qu'il existe une constante C_2 positive, indépendante de n, m et f telle que:

(12) $$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} N_{2,I}(\tilde{F}_k) \leq C_2^n\, m!\, N_{2,J}(f).$$

III.4. Déduire des inégalités (9), (10) et (12), qu'il existe une constante C_3 positive, indépendante de n, m et f telle que:

(13) $$\frac{1}{m!} N_{2,I}(\tilde{f}^{(m)}) \leq C_3^n \left[N_{2,J}(f) + \frac{1}{n!} N_{2,J}(f^{(n)})\right].$$

IV. Application.

Soit f une fonction réelle de classe C^∞ sur J. Soit $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers telle que la suite $\left(\frac{k_{j+1}}{k_j}\right)_{j\geq 1}$ soit bornée.

On suppose qu'il existe une constante C, strictement positive, pour laquelle, pour tout entier j:

$$N_{2,J}(f^{(k_j)}) \leq C^{k_j+1}.k_j!.$$

Déduire de (13) qu'il existe une constante C', strictement positive, telle que, pour tout entier m: $$N_{2,I}(\tilde{f}^{(m)}) \leq C'^{m+1}.m!.$$

(On pourra considérer l'entier k_j pour lequel $k_j \leq m < k_{j+1}$).

En déduire que f est développable en série entière au voisinage de chaque point intérieur de I.