SESSION DE 1990

CONCOURS EXTERNE

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 5 heures

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.

L'usage des instruments de calcul, en particulier des calculatrices électroniques de poche — y compris calculatrices programmables et alphanumériques — à fonctionnement autonome, non imprimantes, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

2 feuilles de papier millimétré.

Tournez la page S.V.P.

NOTATIONS ET OBJECTIFS DU PROBLÈME

Dans tout le problème, P désigne le plan euclidien orienté, n désigne un entier supérieur ou égal à 2, et $\mathscr{E}$ un ensemble à n éléments (2 à 2 distincts) $A_1, \dots, A_n$ de P.

On note Ω le complémentaire de $\mathscr{E}$ dans P.

Chaque point A_i exerce sur un point M quelconque de Ω une force d'attraction $\vec{F}_i = \dfrac{\overrightarrow{MA_i}}{MA_i^2}$ (où MA_i désigne la longueur du segment $[M\,A_i]$).

Le but du problème est l'étude de l'ensemble d $(\mathscr{E})$ des points M de Ω vérifiant la relation :

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{\overrightarrow{MA_i}}{MA_i^2} = \vec{0}$$

c'est-à-dire de l'ensemble des positions d'équilibre du point M.

Les parties C et D sont indépendantes. Cependant, elles dépendent des parties A et B dont les candidats pourront éventuellement utiliser les résultats sans les avoir démontrés.

A. Description de d $(\mathscr{E})$ lorsque les points A_i sont alignés

On suppose, dans toute cette partie, que les A_i sont alignés sur une droite D. On rapporte cette droite à un repère normé $(O\,;\vec{u})$, et on note $a_1, \dots, a_n$ les abscisses respectives des points $A_1, \dots, A_n$.

On suppose de plus que : $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.

A.1. Montrer que d $(\mathscr{E})$ est inclus dans D.

A.2. On suppose, dans cette question seulement, que $n = 2$.
Montrer que si M appartient à d $(\mathscr{E})$, il vérifie l'égalité $MA_1 = MA_2$; et déterminer d $(\mathscr{E})$.

A.3. Montrer que d $(\mathscr{E})$ est inclus dans le segment $[A_1\,A_n]$.

A.4. Pour tout réel x différent de $a_1, \dots, a_n$, on note M le point de D d'abscisse x.

A.4.*a*. Calculer en fonction de $x, a_1, \dots, a_n$, l'abscisse $\varphi(x)$ du vecteur

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\overrightarrow{MA_i}}{MA_i^2}.$$

A.4.*b*. Construire le tableau de variations de la fonction $\varphi : x \to \varphi(x)$, en précisant les limites de la fonction φ aux bornes des intervalles où elle est définie.

A.4.*c*. En déduire le nombre d'éléments de d $(\mathscr{E})$, et la position relative des points de d $(\mathscr{E})$ par rapport aux points A_i.

B. Description de d ($\mathscr{E}$) dans le cas général et étude de quelques exemples

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

On note a_i l'affixe du point A_i quel que soit i compris entre 1 et n.

B.1. Soit M un point de Ω d'affixe z.

Montrer qu'il appartient à d ($\mathscr{E}$) si et seulement si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z-a_i} = 0$.

B.2. On considère le polynôme $Q(X) = (X-a_1)\ \dots\ (X-a_n)$, et on note $Q'(X)$ son polynôme dérivé.

B.2.*a*. Écrire la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $f(X) = \dfrac{Q'(X)}{Q(X)}$.

B.2.*b*. En déduire que d ($\mathscr{E}$) est l'ensemble de tous les points M du plan P dont l'affixe z vérifie $Q'(z) = 0$.

B.2.*c*. En déduire que d ($\mathscr{E}$) n'est pas vide et que le nombre d'éléments de d ($\mathscr{E}$) est inférieur ou égal à $n-1$.

B.3. On suppose que d ($\mathscr{E}$) a exactement $n-1$ éléments.

Montrer que d ($\mathscr{E}$) a même isobarycentre que $\mathscr{E}$.

Montrer que si $\mathscr{E}'$ est une partie de P ayant le même nombre d'éléments n que la partie $\mathscr{E}$ et vérifiant $d(\mathscr{E}') = d(\mathscr{E})$, alors on a ou bien $\mathscr{E}' = \mathscr{E}$, ou bien $\mathscr{E}' \cap \mathscr{E} = \varnothing$.

B.4. Dans cette question, on suppose $n=4$, $a_1 = a$, $a_2 = -\bar{a}$, $a_3 = -a$, $a_4 = \bar{a}$ où a est un nombre complexe qui n'est ni réel, ni imaginaire pur.

Discuter, selon la nature du quadrilatère $A_1A_2A_3A_4$, le nombre d'éléments de d ($\mathscr{E}$). (Utiliser B.2.*b*.)

B.5. Dans cette question, on suppose $n=3$, $a_1 = \alpha + i\beta$, $a_2 = \alpha - i\beta$, $a_3 = -2\alpha$ où α et β sont deux nombres réels vérifiant $\alpha\sqrt{3} > \beta > 0$.

B.5.*a*. En utilisant B.2.*b*, montrer que d ($\mathscr{E}$) a deux éléments F et F' dont on précisera les coordonnées.

B.5.*b*. Montrer qu'il existe une ellipse $\mathscr{S}$ de foyers F et F' qui passe par le milieu I du segment $[A_1A_2]$ et préciser son équation dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

B.5.*c*. Calculer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{S}$ avec les droites (A_1A_3) et (A_2A_3). (On pourra utiliser une représentation paramétrique de ces droites).

B.5.*d*. Quelle propriété remarquable possède l'ellipse $\mathscr{S}$ relativement au triangle $A_1A_2A_3$?

B.6. Montrer que si s est une similitude, directe ou non, du plan, elle vérifie :

$$s(d(\mathscr{E})) = d(s(\mathscr{E})).$$

Tournez la page S.V.P.

B.7. On rappelle que $\mathcal{E}$ est l'ensemble des sommets d'un polygone régulier si et seulement si $\mathcal{E}$ est invariant par une rotation r d'angle $\dfrac{2\pi}{n}$.

B.7.*a.* Déduire de B.6. et B.2.*c.* que, si $\mathcal{E}$ est l'ensemble des sommets d'un polygone régulier, alors $\mathrm{d}(\mathcal{E})$ est réduit à un point.

B.7.*b.* Réciproquement, montrer que si $\mathrm{d}(\mathcal{E})$ est réduit à un point, alors $\mathcal{E}$ est l'ensemble des sommets d'un polygone régulier (utiliser B.2.*b.*).

C. Recherche de $\mathcal{E}$ connaissant d $(\mathcal{E})$ dans un cas particulier

L'espace E est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O ; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$, et on note x_1, x_2, x_3 les coordonnées d'un point M générique de E.

$\vec{E}$ désigne l'espace vectoriel attaché à E, et α un réel strictement positif.

C.1. Étude d'une surface de E.

C.1.*a.* Soit σ l'endomorphisme de $\vec{E}$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est :

$$H = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Trouver une base orthonormée $\mathcal{B}' = (\vec{u}'_1, \vec{u}'_2, \vec{u}'_3)$ de vecteurs propres de σ, et préciser la matrice H' de σ dans cette base.

C.1.*b.* Soit Σ la surface de E définie par l'équation :

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = -3\alpha^2.$$

Trouver une équation de Σ dans le repère $\mathcal{R}' = (O ; \vec{u}'_1, \vec{u}'_2, \vec{u}'_3)$.

En déduire la nature de l'intersection $\mathcal{C}$ de Σ et du plan d'équation :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

C.1.*c.* Soit $\mathcal{C}'$ la projection orthogonale de $\mathcal{C}$ sur le plan Π passant par O et de vecteurs directeurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

Écrire l'équation de $\mathcal{C}'$ dans le repère $(O ; \vec{u}_1, \vec{u}_2)$.

Calculer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}'$ avec les deux axes de ce repère, ainsi que celles des points de $\mathcal{C}'$ en lesquels la tangente est parallèle à l'un ou l'autre de ces axes.

Déterminer les axes de symétrie orthogonale de $\mathcal{C}'$, puis construire $\mathcal{C}'$ dans le cas où $\alpha = 4$, l'unité de longueur étant égale au centimètre.

C.1.*d.* On note D_1, D_2, D_3 les trois droites d'intersection du plan d'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ avec les trois plans d'équations respectives :

$$x_2 = x_3, \quad x_3 = x_1, \quad \text{et} \quad x_1 = x_2 .$$

Construire sur la figure précédente les projections orthogonales D'_1, D'_2 et D'_3 sur Π de ces trois droites.

On note Γ l'ensemble $\mathscr{C}$ privé de ses points d'intersection avec les droites D_1, D_2, D_3.

Décrire les projections orthogonales Γ' et Γ'' de Γ sur, respectivement, le plan Π et la droite Δ issue de O et de vecteur directeur $\vec{u}_1$.

C.2. **Application :**

Une droite D du plan est rapportée à un repère normé $(O : \vec{u})$, et U, V sont deux points de D d'abscisses respectives α et $-\alpha$.

Soient A_1, A_2, A_3 trois points distincts de D d'abscisses respectives x_1, x_2, x_3. On pose :

$$\mathscr{F} = \{ A_1, A_2, A_3 \} .$$

C.2.*a.* Montrer que $d(\mathscr{F})$ est égal à $\{U, V\}$ si et seulement si le point M de E, de coordonnées x_1, x_2, x_3 (dans le repère $\mathscr{R}$) appartient à Γ (cf C.1.*d.*).

C.2.*b.* On note I et J les points de D d'abscisses 2α et -2α respectivement, et on note Λ le segment [I J] privé des points I, J, U, V.

Montrer que l'ensemble de toutes les parties $\mathscr{F}$ à 3 éléments de D, qui vérifient $d(\mathscr{F}) = \{U, V\}$, forme une partition de Λ.

D. Cas où $\mathscr{E}$ est l'ensemble des trois sommets d'un triangle non équilatéral

D.1. **L'ellipse de Steiner d'un triangle ABC.**

On rappelle qu'une transformation affine transforme toute ellipse en une ellipse (dans toute la suite le mot « ellipse » désigne une ellipse (au sens strict) ou un cercle). On rappelle également que les seules ellipses ayant plus de deux axes de symétrie orthogonale sont les cercles.

D.1.*a.* Soit $\mathscr{S}$ une ellipse du plan P, A_1 et A_2 deux points distincts de $\mathscr{S}$, et T_1, T_2 les tangentes à $\mathscr{S}$ en A_1, A_2 respectivement. On suppose les droites T_1, T_2 sécantes en un point I, et on note J le milieu du segment $[A_1 A_2]$.

Montrer que $\mathscr{S}$ est invariante dans la symétrie par rapport à la droite (I J), parallèlement à la droite $(A_1 A_2)$. (En utilisant une affinité orthogonale on pourra se ramener au cas où $\mathscr{S}$ est un cercle).

Soit ABC un triangle non aplati du plan P, et soient A', B', C' les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB].

D.1.*b.* On suppose le triangle ABC équilatéral, de sorte que son cercle inscrit $\mathscr{S}$ est tangent aux droites (BC), (CA), (AB) respectivement en A', B' et C'. (On ne demande pas de démontrer ce résultat).

Montrer que $\mathscr{S}$ est alors la seule ellipse tangente aux droites (BC), (CA), (AB) en A', B', C' respectivement.

Tournez la page S.V.P.

D.1.*c*. On ne suppose plus le triangle ABC équilatéral.

Montrer qu'il existe une et une seule ellipse tangente aux droites (BC), (CA), (AB) en A', B', C' respectivement. (On pourra se ramener au cas où ABC est équilatéral en utilisant une transformation affine convenable).

Cette ellipse est appelée *ellipse de Steiner* du triangle ABC.

Montrer que son centre de symétrie est un point remarquable, que l'on précisera, du triangle ABC.

D.1.*d*. Montrer que l'ellipse de Steiner d'un triangle ABC non équilatéral n'est jamais un cercle.

D.2. **Lien avec l'ensemble d ({A , B , C}) :**

Soit, dans le plan P, un triangle ABC non aplati et non équilatéral. On rapporte le plan P à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ où O est le centre de gravité du triangle ABC.

On note a, b, c, les affixes respectives de A, B, C, et on note I, J, K les points d'affixes $1, j, j^2$ respectivement $\left(\text{où } j \text{ est le nombre } j = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right)$.

D.2.*a*. Montrer qu'il existe deux nombres complexes α et β avec $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$ tels que, si f désigne l'application de P dans P associée à la transformation $z \to z' = \alpha z + \beta \bar{z}$, les images par f des points I, J et K soient respectivement A, B et C.

D.2.*b*. Soit θ un argument de α et ω un argument de β.

Trouver une représentation paramétrique de l'ellipse de Steiner $\mathcal{S}$ du triangle ABC dans le repère orthonormé $(O ; \vec{u}_1, \vec{u}_2)$ où $\vec{u}_1$ est le vecteur d'affixe $e^{i\left(\frac{\theta + \omega}{2}\right)}$ et $\vec{u}_2$ le vecteur d'affixe $i\, e^{i\left(\frac{\theta + \omega}{2}\right)}$.

En déduire une relation simple entre les affixes des foyers de $\mathcal{S}$ et le produit $\alpha\beta$.

D.2.*c*. Exprimer $ab + bc + ca$ en fonction de α et β.

En déduire que l'ensemble d ({A , B , C}) est constitué de deux points remarquables, qu'on précisera, de l'ellipse $\mathcal{S}$.