SESSION DE 1987

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 5 heures

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.

L'usage des instruments de calcul, en particulier des calculatrices électroniques de poche — y compris calculatrice programmable et alphanumérique — à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Tournez la page S. V. P.

NOTATIONS ET OBJECTIF DU PROBLEME

On se place dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{e_1}, \vec{e_2})$, et on note C le cercle de centre O et de rayon 1. Pour tout nombre réel t, on note M_t le point de C d'affixe e^{it}. On suppose donné un entier naturel $n \geqslant 1$.

Pour toute partie S de C ayant n éléments $A_1, A_2, \dots A_n$ dont les affixes respectives sont : $a_1, a_2, \dots a_n$, on désigne par $P_S(X)$ le polynôme à coefficients complexes défini par la relation

(1) $$P_S(X)=(X-a_1)(X-a_2)\dots(X-a_n),$$

et on désigne par f_S la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation

(2) $$f_S(t)=\|\overrightarrow{A_1M_t}\|\cdot\|\overrightarrow{A_2M_t}\|\dots\|\overrightarrow{A_nM_t}\|.$$

L'objectif du problème est d'étudier les périodes de la fonction f_S, ainsi que son maximum, selon la nature de la configuration géométrique $S=\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$.

I - ETUDE DES PERIODES DE f_S.

On désigne par G_S l'ensemble des périodes de f_S, c'est-à-dire des nombres réels α tels que, pour tout nombre réel t, $f_S(t+\alpha)=f_S(t)$.

Pour tout nombre réel $b>o$, on note $b\mathbb{Z}$ le sous-groupe du groupe additif $\mathbb{R}$ constitué des nombres $q\,b$, où q parcourt $\mathbb{Z}$.

1. *Etude de la correspondance entre* S, f_S *et* P_S.

a) Montrer que, pour tout nombre réel t,

(3) $$f_S(t)=|P_S(e^{it})|.$$

En déduire que 2π est une période de f_S.

b) Caractériser les points M_t tels que $f_S(t)=o$.

c) Soient S et T deux parties de C ayant n éléments.

Prouver que $P_S=P_T$ si et seulement si $S=T$ et que $f_S=f_T$ si et seulement si $S=T$.

Tournez la page S. V. P.

2. *Effet d'une rotation sur* S.

Soit α un nombre réel, r_α la rotation de centre O dont l'angle admet α pour mesure, et $S_\alpha=r_\alpha(S)$ l'image de S par r_α.

a) Calculer l'affixe du point $r_\alpha(A_j)$.

b) Prouver que

$$P_{S_\alpha}(X)=e^{in\alpha}P_S(Xe^{-i\alpha}),$$

et que, pour tout nombre réel t,

$$f_{S_\alpha}(t)=f_S(t-\alpha).$$

3. *Caractérisation des périodes de* f_S.

Soit α un nombre réel. Prouver que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

a. le nombre α est une période de f_S ;

b. $$P_S(X)=e^{in\alpha}P_S(Xe^{-i\alpha}) ;$$

c. la partie S est globalement invariante par la rotation r_α, c'est-à-dire $r_\alpha(S)=S$.

4. *Structure du groupe des périodes* G_S.

a) Prouver que G_S est un sous groupe du groupe additif $\mathbb{R}$ et que G_S contient $2\pi\mathbb{Z}$.

b) Pour tout élément j de $[1,n]$, on désigne par θ_j l'unique élément de $[0,2\pi[$ tel que $a_j=e^{i\theta_j}$, et on suppose que les points $A_1,\dots,A_n$ sont rangés de telle sorte que $\theta_1<\theta_2<\dots<\theta_n$.

Montrer que si f_S admet une période α appartenant à $]0,2\pi[$, alors il existe un élément j de $[2,n]$ tel que $\alpha=\theta_j-\theta_1$.

c) En déduire que G_S admet un plus petit élément strictement positif, noté α_S.
Montrer que $G_S=\alpha_S\mathbb{Z}$.

d) Prouver que α_S est de la forme $\alpha_S=\dfrac{2\pi}{p_S}$, où p_S est un entier strictement positif.

e) A l'aide de la question 3, montrer que $e^{in\alpha_S}=1$.

Prouver finalement que α_S est de la forme $\alpha_S=\dfrac{2\pi}{p_S}$, où p_S est un diviseur de n ;

en particulier $\alpha_S\geqslant\dfrac{2\pi}{n}$.

5. *Caractérisation géométrique du cas* $\alpha_S = \frac{2\pi}{n}$.

On suppose que $n \geq 2$.

a) On suppose que S est un polygone régulier convexe, c'est-à-dire de la forme $S=\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, où pour tout $j \in [1, n-1]$, $A_{j+1} = r_{\frac{2\pi}{n}}(A_j)$.

Calculer $P_S(X)$, $f_S(t)$ et α_S.

A cet effet, on pourra se ramener au cas où $a_1=1$, et montrer alors que $P_S(X)=X^n-1$.

b) Prouver que $\alpha_S = \frac{2\pi}{n}$ si et seulement si $S=\{A_1, A_2, \ldots A_n\}$ est un polygone régulier convexe.

6. *Caractérisation géométrique des cas où* $\alpha_S<2\pi$.

Pour chaque cas étudié, on fera une figure, en prenant 4cm pour unité graphique.

a) Lorsque n est un nombre premier, caractériser les configurations S tels que $\alpha_S<2\pi$.

b) On suppose que $n=4$. Caractériser les configurations S telles que $\alpha_S<2\pi$, en distinguant deux cas selon que $p_S=4$ ou $p_S=2$. Préciser alors la forme de $P_S(X)$.

c) Etudier de même le cas où $n=6$, en distinguant les cas $p_S=6$, $p_S=3$ et $p_S=2$.

d) Soit plus généralement p un diviseur de n, où $p\neq 1$. Caractériser les configurations S telles que $\frac{2\pi}{p}$ soit une période de f_S ; caractériser aussi cette propriété à l'aide du polynôme $P_S(X)$. Parmi ces configurations, caractériser celles pour lesquelles $\alpha_S = \frac{2\pi}{p}$.

II - ETUDE DU MAXIMUM DE f_S.

On désigne par E_n l'ensemble des parties S de C ayant n éléments. Pour tout élément S de E_n, on note F_S la fonction qui, à tout point M de C, associe

$$F_S(M) = \|\overrightarrow{A_1M}\| \cdot \|\overrightarrow{A_2M}\| \cdots \|\overrightarrow{A_nM}\|.$$

1. *Etude du maximum de* F_S.

a) Prouver que la fonction f_S est continue bornée sur $\mathbb{R}$, et atteint sa borne supérieure, notée K_S, en au moins un point t de $[0, 2\pi[$.

b) Etablir que

$$K_S = \sup_{M \in C} F_S(M).$$

Tournez la page S. V. P.

c) Prouver que pour toute rotation r_α,

$$K_{S_\alpha} = K_S, \text{ où } S_\alpha = r_\alpha(S).$$

2. *Majoration de* K_S.

a) Prouver que, pour tout élément S de E_n,

(4) $$K_S \leq 2^n.$$

b) Etablir que

(5) $$\sup_{S \in E_n} K_S = 2^n.$$

Existe-t-il un élément S de E_n tel que $K_S = 2^n$?

Dans toute la suite, on suppose que $n \geq 2$.

3. *Calcul de* K_S *lorsque* S *est un polygone régulier.*

a) Prouver que si pour tout élément j de $[0, n-1]$, $a_{j+1} = e^{\frac{2ij\pi}{n}}$, alors pour tout nombre réel t,

$$f_S(t) = 2\left|\sin \frac{nt}{2}\right|.$$

Construire la courbe représentative de f_S sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ dans le cas où n=3.

b) En déduire que, si $S = \{A_1, A_2, \ldots A_n\}$ est un polygone régulier convexe, alors $K_S = 2$, et montrer qu'il existe exactement n points $B_1, B_2, \ldots B_n$ de C tels que $F_S(B_j) = 2$. Indiquer comment le polygone $\{B_1 B_2, \ldots, B_n\}$ se déduit du polygone S.
Lorsque n=3, placer sur une figure les points A_1, A_2, A_3 et B_1, B_2, B_3.

4. *Calcul des coefficients d'un polynôme en fonction de ses valeurs sur les racines de l'unité.*

Soit P un polynôme à coefficients complexes de degré n et dont le coefficient de X^n est égal à 1. On écrit P sous la forme

$$P = X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \ldots + b_{n-k}X^{n-k} + \ldots + b_o.$$

Pour tout élément j de $[0, n-1]$, on pose $z_{j+1} = e^{\frac{2ij\pi}{n}}$.

a) Pour tout entier naturel k, calculer la somme

$$z_1^k + z_2^k + \ldots + z_n^k.$$

On distinguera deux cas selon que k appartient à $n\mathbb{Z}$ ou non.

b) En déduire que,

(6) $n(b_o+1)=P(z_1)+P(z_2)+\ldots+P(z_n)$

et que, pour tout élément k de $[1,n-1]$,

(7) $n\, b_{n-k}=z_1^kP(z_1)+z_2^kP(z_2)+\ldots+z_n^kP(z_n)$.

5. *Maximum de la somme de n nombres complexes.*

Soit K un nombre réel strictement positif et $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ des nombres complexes non nuls tels que, pour tout élément j de $[1,n]$, $|\lambda_j|\leqslant K$.

Montrer que

$$|\lambda_1+\ldots+\lambda_n|\leqslant nK,$$

avec égalité si et seulement si, pour tout j, $|\lambda_j|=K$ et $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n$.

On pourra d'abord caractériser les cas où $|\lambda_1+\ldots+\lambda_n|=|\lambda_1|+\ldots+|\lambda_n|$.

6. *Minoration de* K_S.

Soit S un élement de E_n.

a) Calculer $P_S(0)$ en fonction de $a_1,a_2,\ldots,a_n$. Que vaut $|P_S(0)|$?

Montrer qu'il existe une rotation r_α telle que $P_{S_\alpha}(0)=1$.

b) On se place dans le cas où $P_S(0)=1$.

En utilisant les résultats établis aux questions 4 et 5. Démontrer que $2\leqslant K_S$ et que $K_S=2$ si et seulement si,pour tout j, $|P_S(z_j)|=K_S$ et $P_S(z_1)=P_S(z_2)=\ldots=P_S(z_n)$.

En déduire que si $K_S=2$, alors $P_S(X)=X^n+1$.

c) Etablir finalement que, pour tout élément S de E_n, $K_S\geqslant 2$, et que $K_S=2$ si et seulement si S est un polygone régulier convexe.

7. *Lien entre le maximum* K_S *et la période* p_S.

Pour tout diviseur p de n, $p\neq 1$, on note $E_{n,p}$ l'ensemble des élements S de E_n tel que $\frac{2\pi}{p}=\alpha_S$.

Calculer les nombres

$$\sup_{S\in E_{n,p}} K_S \quad \text{et} \quad \inf_{S\in E_{n,p}} K_S.$$