SESSION DE 1987

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 5 heures

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.

L'usage des instruments de calcul, en particulier des calculatrices électroniques de poche — y compris calculatrice programmable et alphanumérique — à fonctionnement autonome, non imprimante, est autorisé conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Tournez la page S. V. P.

NOTATIONS ET OBJECTIF DU PROBLEME

Dans tout ce problème on désigne par c un nombre réel positif ou nul, et par C^{∞} l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles ou complexes, indéfiniment dérivables sur l'intervalle $[c,+\infty[$.

On désigne par E le sous-espace vectoriel de C^{∞} constitué des fonctions f admettant 0 pour limite en $+\infty$ ainsi que toutes leurs dérivées successives $f^{(p)}$.

Pour tout élément f de E, on pose

$$N_{\infty}(f)=\sup_{t\geq c}|f(t)|,$$

et

$$N_1(f)=\int_c^{+\infty}|f(t)|dt$$

lorsque cette intégrale converge.

On désigne par E_+ la partie de E constituée des fonctions f à valeurs réelles positives et telles que, pour tout entier $p\geq 1$, $(-1)^p f^{(p)}$ soit à valeurs réelles positives.

On note D et Δ les endomorphismes de E qui à tout élément f associent les fonctions définies par les relations $Df(x)=f'(x)$ et $\Delta f(x)=f(x)-f(x+1)$. Enfin, l'application identique de E est notée I. On observera que les endomorphismes D et Δ commutent, ce qu'on écrira $D\Delta=\Delta D$.

L'objectif de ce problème est d'étudier l'opérateur Δ, ce qui fait l'objet de la partie II, et d'exploiter cet opérateur pour construire et étudier un procédé d'accélération de convergence des séries alternées, dû à L.Euler, ce qui fait l'objet de la partie III. Dans la partie I, on explore quelques propriétés de E et de E_+ utiles pour la suite.

I - ETUDE DE LA DOMINATION PAR UN ELEMENT DE E_+.

1. *Stabilité de* E_+.

a) Prouver que E est une sous-algèbre de l'algèbre C^{∞}.

b) Prouver que si φ et ψ sont des éléments de E_+, alors $\varphi+\psi$ et $\varphi\psi$ appartiennent encore à E_+, ainsi que $\lambda\varphi$, où λ est réel positif.

Tournez la page S. V. P.

c) Prouver que, pour tout élément φ de E_+, $-D\varphi$ et $\Delta\varphi$ appartiennent encore à E_+.

2. *Etude d'exemples.*

a) Déterminer les nombres réels α tels que la fonction $x \mapsto e^{-\alpha x}$ appartienne à E_+.

b) Déterminer les nombres réels a et α tels que la fonction $x \mapsto (x-a)^{-\alpha}$ appartienne à E_+.

c) Prouver que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$ n'appartient pas à E_+.

3. *Domination par un élément de* E_+.

Soit φ un élément de E_+. On note $M(\varphi)$ l'ensemble des éléments f de C^∞ tels que, pour tout $p \geq o$, $|D^p f| \leq |D^p\varphi|$, et $B(\varphi)$ l'ensemble des éléments f de C^∞ tels que, pour tout $p \geq o$, il existe un nombre réel $\alpha_p > o$ tel que $|D^p f| \leq \alpha_p |D^p\varphi|$.

a) Prouver $B(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de E, et que, pour tout élément f de $B(\varphi)$, l'intégrale $\int_c^{+\infty} |D^p f(t)|dt$ est convergente.

b) Soient φ et Ψ des éléments de E_+. Montrer que si f appartient à $M(\varphi)$ et g à $M(\Psi)$, alors f+g appartient à $M(\varphi+\Psi)$, fg appartient à $M(\varphi\Psi)$, et λf appartient à $M(|\lambda|\varphi)$, pour tout nombre complexe λ.

c) Prouver que, si f appartient à $M(\varphi)$, alors Df appartient à $M(|D\varphi|)$.

d) Soit f un élément de $M(\varphi)$; prouver que, pour tout nombre réel $x \geq c$,

$$|f(x)-f(x+1)| \leq \varphi(x) - \varphi(x+1).$$

A cet effet, on pourra utiliser la relation

$$f(x+1)-f(x) = \int_x^{x+1} f'(t)dt.$$

Etablir que Δf appartient à $M(\Delta\varphi)$.

e) Soit φ un élément de E_+. Prouver que $\Delta\varphi$ appartient à $M(|D\varphi|)$ et, plus généralement, que pour tout $p \geq 1$, $\Delta^p\varphi$ appartient à $M(|D^p\varphi|)$.

4. *Etude d'exemples.*

a) Soit $z=a+ib$ un nombre complexe, où a et b sont réels.

Montrer que, si $a<c$, alors, pour tout entier $k\geqslant 1$, $x \mapsto \frac{1}{(x-z)^k}$ appartient à $M\left(\frac{1}{(x-a)^k}\right)$.

b) Soit plus généralement P un polynôme unitaire à coefficients réels ou complexes de degré $n\geqslant 1$, dont toutes les racines ont une partie réelle inférieure ou égale à a. Montrer que, si $a<c$, $x \mapsto \frac{1}{P(x)}$ appartient à $M\left(\frac{1}{(x-a)^n}\right)$

Examiner le cas de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$.

c) Soit R une fraction rationnelle de degré $-n$, où $n>0$, dont tous les pôles sont simples et ont une partie réelle inférieure ou égale à a. Montrer que si $a<c$, il existe un nombre réel $k>0$ tel que $x \mapsto R(x)$ appartienne à $M\left(\frac{k}{(x-a)^n}\right)$. Pour cela, on pourra se ramener au cas où $n=1$, en considérant $x \mapsto (x-a)^{n-1}R(x)$.

Examiner le cas de la fonction $x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$.

d) Soient $\gamma=\alpha+i\beta$ un nombre complexe tel que $\alpha>0$ et $0\leqslant\beta<2\pi$, et g un élément 1-périodique de $C^\infty(\mathbb{R})$. Prouver que la fonction $x \mapsto f(x)=e^{-\gamma x}g(x)$ appartient à $B(e^{-\alpha x})$. Montrer, en revanche, que, sauf dans le cas où $\beta=0$ et g est constante, il n'existe pas de nombre réel $k>0$ tel que f appartienne à $M(ke^{-\alpha x})$. A cet effet, on pourra développer g en série de Fourier sous la forme

$$g(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(g)e^{2i\pi nx}, \text{ où } c_n(g)=\int_0^1 g(t)e^{-2i\pi nt}dt,$$

calculer D^pf en dérivant terme à terme, l'écrire sous la forme $D^pf(x)=e^{-\gamma x}g_p(x)$, et calculer $|c_n(g_p)|$.

I - ETUDE DE L'OPERATEUR Δ.

1. *Etude de l'opérateur* D.

a) Déterminer le noyau de l'endomorphisme D.

b) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de D. Quels sont les vecteurs propres appartenant à E_+?

c) Montrer que l'image de D n'est autre que le sous-espace vectoriel E_1 de E constitué des fonctions g telles que $\int_c^{+\infty} g(t)dt$ converge.

d) Comparer $D(E_+)$ et $E_+ \cap E_1$.

e) Soit Ψ un élément de $E_+ \cap E_1$, et g un élément de $M(\Psi)$. Montrer qu'il existe un élément φ et un seul de E_+ tel que $D\varphi = -\psi$ et un élément f et un seul de E tel que $Df=g$, et que, dans ces conditions, f est un élément de $M(\varphi)$.

f) Enoncer et démontrer un résultat analogue lorsque g appartient à $B(\Psi)$.

22. *Comparaison de* Δ *et de* D.

Soit f un élément de E.

a) Prouver que $N_\infty(\Delta f) \leqslant N_\infty(Df)$,

et, plus généralement, que, pour tout entier $p \geqslant 1$,

(1) $$N_\infty(\Delta^p f) \leqslant N_\infty(D^p f).$$

b) On suppose que l'intégrale $\int_c^{+\infty} |Df(t)|dt$ converge.

Soit χ la fonction définie sur $[c,+\infty[$ par la relation $\chi(x)=\int_x^{+\infty} |Df(t)|dt$.

Prouver que, pour tout $t \geqslant c$, $|\Delta f(t)| \leqslant \Delta\chi(t)$ et que, pour tout $x \geqslant c$,

$$\int_c^x \Delta\chi(t)dt \leqslant \int_c^{c+1} \chi(t)dt \leqslant \chi(c).$$

En déduire que $|\Delta f|$ appartient à E_1 et que $N_1(\Delta f) \leqslant N_1(Df)$.

c) On suppose que f appartient à $M(\varphi)$, où φ est un élément de E_+.

Prouver que pour tout $p \geqslant 1$, $|\Delta^p f|$ appartient à E_1 et que

(2) $$N_1(\Delta^p f) \leqslant N_1(D^p f).$$

3. *Valeurs propres de l'endomorphisme* Δ.

a) Déterminer le noyau de l'endomorphisme Δ.

b) Déterminer les valeurs propres λ et les vecteurs propres de Δ : Si $\lambda \neq 1$, on montrera d'abord que les vecteurs propres de Δ considéré comme endomorphisme de C^∞ sont les fonctions $f_\gamma(x)$ de la forme $f_\gamma(x)=e^{-\gamma x}g(x)$, où $\gamma=\alpha+i\beta$, $0 \leqslant \beta < 2\pi$, et g est une fonction 1-périodique de classe C^∞ non nulle ; on déterminera ensuite γ pour que f_γ appartienne à E. On étudiera enfin le cas où $\lambda=1$.

c) Soit h une fonction 1-périodique de classe C^{∞} à valeurs réelles positives.

Prouver que les coefficients de Fourier de h satisfont aux inégalités

$$c_o(h) \geqslant o \text{ et, pour tout } n \neq o, \ |c_n(h)| \leqslant c_o(h).$$

A cet effet, on pourra écrire, que pour tout $n \neq o$ et tout nombre réel δ,

$$\int_0^1 h(t)\left[1-\cos(2\pi nt+\delta)\right]dt \geqslant o,$$ et exprimer cette intégrale à l'aide de

$c_o(h)$, $c_n(h)$ et $\overline{c_n(h)}$.

d) En déduire que, si $\lambda \neq 1$, les vecteurs propres de Δ appartenant à E_+ sont de la forme $x \longmapsto ke^{-\alpha x}$, où $\alpha > o$ et $k > o$. Pour cela, on observera que si f_γ appartient à E_+, alors $\varphi = f_\gamma^2 = f_\gamma \overline{f_\gamma}$ appartient aussi à E_+, on calculera $D^p\varphi$ en développant $g\bar{g}$ en série de Fourier, et on montrera que, pour tout $n \neq o$, $c_n(g\bar{g}) = o$ en appliquant le résultat du c) à des fonctions h convenables.

4. *Image de l'endomorphisme Δ.*

a) Prouver que si $\varphi \in E_+$, alors $\Psi = \Delta\varphi$ appartient à $E_+ \cap E_1$ et que, pour tout $x \geqslant c$,

(3) $$\varphi(x) = \sum_{n=o}^{+\infty} \psi(x+n),$$

cette série étant convergente.

En déduire que, si f appartient à $M(\varphi)$, alors $g = \Delta f$ appartient à $M(\Psi)$ et que, pour tout $x \geqslant c$,

(3') $$f(x) = \sum_{n=o}^{+\infty} g(x+n),$$

cette série étant absolument convergente.

b) Réciproquement, soit Ψ un élément de $E_+ \cap E_1$, montrer que la série (3) est normalement convergente sur $[c,+\infty[$, et que, si φ désigne sa somme,

$$\varphi(x) \leqslant \Psi(x) + \int_x^{+\infty} \psi(t)dt.$$

Montrer finalement que φ appartient à E_+ et que c'est l'unique élément de E_+ tel que $\Delta\varphi = \Psi$.

c) Soit, plus généralement, g un élément de $M(\Psi)$, où $\Psi \in E_+ \cap E_1$. Prouver que la série (3') est normalement convergente sur $[c,+\infty[$ que sa somme f appartient à $M(\varphi)$ et que f est l'unique élément de E tel que $\Delta f = g$.

d) Enoncer et démontrer un résultat analogue lorsque g appartient à $B(\psi)$.

Tournez la page S. V. P.

III - ACCELERATION DE CONVERGENCE DES SERIES ALTERNEES.

Dans cette partie, on suppose que $c=0$.

1. *Encadrement du reste lorsque le terme général appartient à* E_+.

Soit φ un élément de E_+.

a) Montrer que la série alternée $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \varphi(k)$ est convergente. On note $S(\varphi)$ sa somme. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $S_n(\varphi) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \varphi(k)$ et $R_n(\varphi) = (-1)^{n+1}\left[S(\varphi) - S_n(\varphi)\right]$.

b) Prouver que, pour tout entier $n \geq 0$,

$$0 \leq R_n(\varphi) = \sum_{q=0}^{+\infty} \Delta\varphi(n+2q+1) \ ;$$

en déduire que la suite $R_n(\varphi)$ est décroissante.

c) Etablir que, pour tout entier $n \geq 0$,

$$R_n(\varphi) + R_{n+1}(\varphi) = \varphi(n+1).$$

d) Prouver finalement que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$(4) \quad \frac{1}{2}\varphi(n+1) \leq R_n(\varphi) \leq \frac{1}{2}\varphi(n).$$

2. *Majoration du reste par domination.*

Soit f un élément de E appartenant à $M(\varphi)$, où φ appartient à E_+.

a) Prouver que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k f(k)$ converge ; pour cela, on pourra d'abord établir que la série $\sum_{q=0}^{+\infty} \Delta f(2q)$ est absolument convergente.

On pose alors

$$(5) \quad S(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k f(k),$$

et on définit $S_n(f)$ et $R_n(f)$ comme au 1.a).

b) Prouver que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$(6) \quad |R_n(f)| \leq \frac{1}{2}\varphi(n).$$

3. *Accélération de convergence.*

Soit φ un élément de E_+ tel que, pour tout entier $p \geq 0$, $|D^{p+1}\varphi|$ soit négligeable devant $|D^p\varphi|$ au voisinage de $+\infty$, et f un élément de $M(\varphi)$.

On se propose d'accélérer la convergence de $S_n(f)$ vers $S(f)$ en déterminant un développement asymptotique du reste $R_n(f)$; à cet effet, on exprime $R_n(f)$ en fonction de $R_n(\Delta f)$, et on itère ce processus.

a) *Description du procédé d'accélération de convergence.*

Prouver que, pour tout entier $n \geq 0$,

$$R_n(f)=\frac{1}{2}f(n+1)+\frac{1}{2}R_n(\Delta f).$$

En déduire que, pour tout entier $p \geq 1$ et tout entier $n \geq 0$,

$$(7) \quad R_n(f)=U_p f(n+1)+\frac{1}{2^p}R_n(\Delta^p f),$$

où U_p est l'endomorphisme de E définit par la relation

$$(8) \quad U_p=\frac{1}{2}I+\frac{1}{4}\Delta+\frac{1}{8}\Delta^2+\ldots+\frac{1}{2^p}\Delta^{p-1}.$$

On pose alors

$$(9) \quad S_n^p(f)=S_n(f)+(-1)^{n+1}U_p f(n+1).$$

b) *Majoration du reste associé à ce procédé.*

Etablir que

$$(10) \quad |S(f)-S_n^p(f)| \leq \frac{1}{2^{p+1}}|D^p\varphi(n)|.$$

Prouver que, si φ est à valeurs strictement positives,

$$(11) \quad |S(\varphi)-S_n^p(\varphi)| \sim \frac{1}{2^{p+1}}|D^p\varphi(n)| \text{ lorsque } n \text{ tend vers } +\infty.$$

Pour cela, on établira d'abord que, pour tout entier $k \geq 0$ et tout nombre réel $b \geq 0$, $D^k\varphi(n+b) \sim D^k\varphi(n)$; on montrera ensuite que, pour tout nombre réel $x \geq 0$, $|D^k\varphi(x+k)| \leq \Delta^k\varphi(x) \leq |D^k\varphi(x)|$; on utilisera enfin l'encadrement (4).

c) *Stabilité de ce procédé.*

Soit F l'espace des fonctions continues bornées sur $[0,+\infty[$.

On considère Δ et U_p comme des endomorphismes de F.

Montrer que, pour tout élément h de F,

$$N_\infty(U_p h) \leq \frac{p}{2}N_\infty(h).$$

En déduire la précision à laquelle on obtient $U_p f(n+1)$ lorsque les valeurs de f sont calculées à la précision 10^{-r}.

Ecrire un algorithme permettant de calculer $U_p f(n+1)$ à partir des valeurs $f(n+1)$, $f(n+2),\ldots,f(n+p)$.

Tournez la page S. V. P.

d) Indiquer comment on peut étendre les résultats précédents lorsque φ est définie sur $[d,+\infty[$, où $d>0$, et que $n \geqslant d$.

4. *Etude d'un exemple.*

On prend $f(x)=\dfrac{1}{x^3+1}$, et on se propose de calculer $S(f)$ à la précision 10^{-8}.

a) Montrer que, sur $[1,+\infty[$, f appartient à $M(\varphi)$, où $\varphi(x)=\dfrac{1}{(x-\frac{1}{2})^3}$. Calculer $\varepsilon_n^p=\dfrac{1}{2^{p+1}}|D^p\varphi(n)|$.

b) Déterminer un entier n_p tel que $\varepsilon_{n_p}^p \leqslant \frac{1}{2}\,10^{-8}$. Quel choix pour p est-il pertinent ?

c) Le choix de p et de n_p étant ainsi effectué, calculer $S_{n_p}^p(f)$ à la précision $\frac{1}{2}\,10^{-8}$, ce qui fournit $S(f)$ à la précision 10^{-8}. (On donnera toutes les justifications utiles concernant l'obtention effective de cette précision).