SESSION DE 1986

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 5 heures

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème. L'emploi des instruments de calcul est autorisé pour cette épreuve.

Notations et objectif du problème

Dans tout le problème on se place dans un plan noté E; la distance de deux points x et y de E est notée $d(x, y)$, le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est noté $\vec{v}.\vec{w}$. Étant donné une partie P fermée non vide de E et un point x de E, on appelle distance de x à P et on note $d(x, \mathrm{P})$ le nombre réel positif défini par la relation

$$d(x, \mathrm{P}) = \inf_{u \in \mathrm{P}} d(x, u).$$

Étant donné un nombre réel $\alpha \geqslant 0$, on note $\mathrm{B}(\mathrm{P}, \alpha)$, ou encore $\mathrm{B}(\alpha)$, l'ensemble des points x de E tels que $d(x, \mathrm{P}) \leqslant \alpha$; si $\alpha > 0$, on note $\mathrm{L}(\mathrm{P}, \alpha)$, ou encore $\mathrm{L}(\alpha)$, l'ensemble des points x de E tels que $d(x, \mathrm{P}) = \alpha$. Les lignes de niveau $\mathrm{L}(\alpha)$ sont appelées *lignes de distance* à P. Étant donné des parties A et B fermées non vides de E, on appelle *médiatrice* de A et B et on note $\mathrm{M}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ l'ensemble des points x de E tels que $d(x, \mathrm{A}) = d(x, \mathrm{B})$. Plus généralement, étant donné un nombre réel λ appartenant à $[0, 1]$, on appelle *ligne de partage entre* A *et* B dans le rapport λ l'ensemble $\mathrm{C}(\lambda)$ des points x de E tels que $(1 - \lambda)\, d(x, \mathrm{A}) = \lambda\, d(x, \mathrm{B})$.

L'objectif du problème est d'étudier la fonction distance et les lignes de distance, ce qui fait l'objet des parties I et II, et les lignes de partage, ce qui fait l'objet de la partie III. Les médiatrices sont étudiées dans la partie II : elles fournissent un exemple important de ligne de partage, mais elles constituent aussi un outil intéressant pour la recherche des lignes de distance. Enfin, dans la partie III, on étudie les fonctions dont les lignes de niveau sont les lignes de partage. Le problème combine la mise en œuvre des méthodes de la géométrie élémentaire avec celle de quelques outils topologiques simples.

I. Lignes de distance à une partie

On désigne par P une partie fermée non vide de E.

Étant donné un point a de P, on appelle *zone d'attraction de a relative* à P et on note $\mathrm{Z}(a)$ l'ensemble des points x de E tels que $d(x, \mathrm{P}) = d(x, a)$, c'est-à-dire tels que la distance $d(x, \mathrm{P})$ soit atteinte au point a.

1. PROPRIÉTÉS DE LA DISTANCE À UNE PARTIE.

a. Soit x un point de E; montrer qu'il existe au moins un point a de P tel que $d(x, \mathrm{P}) = d(x, a)$.

b. Prouver que, pout tout couple (x, y) de points de E,

$$d(x, \mathrm{P}) \leqslant d(x, y) + d(y, \mathrm{P})$$

En déduire que la fonction $x \longmapsto d(x, \mathrm{P})$ est lipschitzienne sur E dans le rapport 1.

Tournez la page S. V. P.

2. Propriétés élémentaires des zones d'attraction.

Soit a un point de P.

a. *Caractérisation de la zone d'attraction de a à l'aide de demi-plans.*

Soit x un point de E. Montrer qu'il est équivalent de dire :

a. Le point x appartient à $Z(a)$;

b. Pour tout point b de P différent de a, le point x appartient au demi-plan fermé $H_b(a)$ limité par la médiatrice des points a et b et contenant a.

b. Montrer que a appartient à $Z(a)$ et que $Z(a) \cap P$ est réduite au point a. Déterminer $Z(a)$ lorsque a appartient à l'intérieur de P.

c. Montrer que la réunion des zones d'attraction $Z(u)$, où u parcourt P, est égale à E.

d. Établir que $Z(a)$ est une partie fermée de E.

e. *Application à la recherche des lignes de distance.*

Soit $L(\alpha)$ une ligne de distance à P. Montrer que $L(\alpha) \cap Z(a) = \Gamma(a, \alpha) \cap Z(a)$, où $\Gamma(a, \alpha)$ désigne le cercle de centre a et de rayon α.

3. Exemples usuels de zones d'attraction et de lignes de distance.

a. Préciser sur des figures les zones d'attraction des points de P lorsque P est un demi-plan, une droite, un segment, un disque, un cercle.

b. Dans chacun de ces cas, déterminer les lignes de distance à P, et tracer sur les figures précédentes quelques-unes de ces lignes.

Déterminer aussi les points x de E tels que la distance $d(x, P)$ soit atteinte en un point a et un seul.

4. Description géométrique des zones d'attraction.

Soit a un point de P.

a. *Caractérisation géométrique des zones d'attraction.*

Soit x un point de E distinct de a ; montrer qu'il est équivalent de dire :

a. Le point x appartient à $Z(a)$;

b. Le disque ouvert de centre x et de rayon $\alpha = d(x, a)$ ne rencontre pas P.

b. Soit b un point de P distinct de a tel que le segment $[a, b]$ soit contenu dans P. Montrer que $Z(a) \cap Z(b)$ est vide.

c. On suppose que $Z(a)$ contient un point x distinct de a. Montrer que pour tout point y de $[a, x]$ distinct de x, la distance $d(y, P)$ est atteinte au seul point a ; en particulier $Z(a)$ contient $[a, x]$.

d. Étant donné un vecteur unitaire $\vec{k}$, on note $\Delta(\vec{k})$ la demi-droite d'origine a constituée des points x tels que $\overrightarrow{ax} = \lambda \vec{k}$, où $\lambda \geqslant 0$. Montrer qu'il est équivalent de dire :

a. La zone d'attraction $Z(a)$ contient $\Delta(\vec{k})$;

b. Pour tout point u de P, $\vec{k} . \overrightarrow{au} \leqslant 0$.

e. Donner un exemple d'une partie P et d'un point a de la frontière de P tel que $Z(a)$ soit réduite au point a.

5. Propriétés topologiques des lignes de distance.

a. Montrer que, pour tout nombre réel $\alpha \geqslant 0$, $B(\alpha)$ est une partie fermée de E contenant P; comparer $B(0)$ et P.

b. Soient α et β des nombres réels strictement positifs; montrer que $B(B(\alpha), \beta) = B(\alpha + \beta)$.

c. Montrer que, pour tout nombre réel $\alpha > 0$, la ligne de distance $L(\alpha)$ est une partie fermée de E, et que l'intérieur de $L(\alpha)$ est vide (on pourra utiliser 4.*c*).

d. On suppose que P est distincte de E. Montrer que l'ensemble I des nombres réels strictement positifs α tels que L (α) soit non vide est un intervalle non vide d'origine 0, et que, si P est compacte, I $=]0, +\infty[$. Donner un exemple de partie P telle que I $=]0, 1]$ et un exemple de partie P telle que I $=]0, 1[$.

6. Cas des parties convexes.

On suppose que P est convexe et distincte de E.

a. Prouver que, pour tout point x de E n'appartenant pas à P, la distance $d(x, \mathrm{P})$ est atteinte en un point a de P et un seul. Montrer que P est contenue dans le demi-plan constitué des points u de E tels que $\overrightarrow{ax} \cdot \overrightarrow{au} \leqslant 0$, et que Z (a) contient la demi-droite d'origine a passant par x.

b. Montrer que, pour tout nombre réel $\alpha > 0$, B (α) est une partie convexe de E et que L (α) est la frontière de B (α).

c. Les résultats de cette question ne sont pas utilisés dans la suite du problème.

On suppose que P est une partie convexe compacte d'intérieur non vide, dont la frontière C admet des points anguleux $b_0, b_1, \ldots, b_n$, où $b_n = b_0$, chacun des arcs C_j de C d'origine b_j et d'extrémité b_{j+1}, où $0 \leqslant j \leqslant n-1$, étant de classe C^∞. En tout point a de C_j, on note $\overrightarrow{k_j}(a)$ le vecteur unitaire normal à C_j au point a tel que P soit contenue dans le demi-plan $\overrightarrow{k_j}(a) \cdot \overrightarrow{au} \leqslant 0$.

Montrer que si a appartient à C_j, $a \neq b_j$, $a \neq b_{j+1}$, Z (a) est égale à la demi-droite $\Delta(\overrightarrow{k_j}(a))$. Déterminer Z (a) lorsque a est un des points b_j.

Prouver enfin que, pour tout $\alpha > 0$, la ligne de distance L (α) est de classe C^1.

II. Médiatrice de deux parties

1. Propriétés topologiques de la médiatrice.

On désigne par A et B des parties fermées non vides de E.

a. Montrer que pour tout point a de A et pour tout point b de B le segment $[a, b]$ coupe la médiatrice M (A, B) en au moins un point.

b. Montrer que la partie M (A, B) est fermée et contient A $\cap$ B.

c. On suppose que A et B sont disjointes; prouver que M (A, B) est d'intérieur vide (on pourra utiliser I.4.*c*).

2. Médiatrice et lignes de distance.

Soit P une partie fermée non vide de E.

a. Soit A une partie fermée non vide de P. On appelle *zone d'attraction de* A *relative à* P l'ensemble Z(A) des points x de E tels que $d(x, \mathrm{P}) = d(x, \mathrm{A})$. (Lorsque A est réduite à un point a, on retrouve Z (a).)

Montrer que Z (A) est une partie fermée de E contenant A et que Z (A) est la réunion des zones d'attraction Z (a), où a parcourt A.

Soit alors L (P, α) une ligne de distance à P; montrer que L $(\mathrm{P}, \alpha) \cap$ Z (A) $=$ L $(\mathrm{A}, \alpha) \cap$ Z (A).

b. On suppose que P est la réunion de deux parties fermées non vides A et B.

Montrer qu'un point x de E appartient à la zone d'attraction Z (A) (relative à P) si, et seulement si, $d(x, \mathrm{A}) \leqslant d(x, \mathrm{B})$. En déduire que Z (A) $\cup$ Z (B) $=$ E et que Z (A) $\cap$ Z (B) $=$ M (A, B).

c. On suppose plus généralement que P est la réunion de parties fermées non vides $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n$. Étant donné un élément j de $[1, n]$, montrer qu'un point x de E appartient à la zone d'attraction Z (A_j) si, et seulement si, pour tout $i \neq j$, $d(x, \mathrm{A}_j) \leqslant d(x, \mathrm{A}_i)$.

En déduire une méthode d'obtention d'une ligne de distance L (P, α) connaissant les zones d'attraction Z (A_j) et les lignes de distance L (A_j, α).

Tournez la page S. V. P.

3. Médiatrice et symétries.

Soit A et B des parties fermées non vides de E, et P = A ∪ B.

a. On suppose que A et B sont invariantes par une isométrie h de E (c'est-à-dire que h (A) = A et h (B) = B). Montrer que Z (A), Z (B) et M (A, B) sont aussi invariantes par h.

b. On suppose qu'une symétrie orthogonale h (c'est-à-dire, soit une symétrie centrale, soit une réflexion) échange A et B ; montrer qu'elle échange aussi Z (A) et Z (B), que M (A, B) est invariante par h et que M (A, B) contient les points fixes de h.

c. On suppose enfin qu'une réflexion h d'axe D échange A et B et que A est contenue dans un des demi-plans ouverts limités par D. Prouver que Z (A) est le demi-plan fermé limité par D contenant A; en déduire que M (A, B) = D.

4. Exemples d'emploi de médiatrices pour la recherche de lignes de distance.

Soient a et b deux points distincts de E.

a. Préciser sur une figure l'ensemble M (A, B), les zones Z (A) et Z (B), ainsi que les lignes de distance à P = A ∪ B lorsque A et B sont réduites respectivement aux points a et b. (On prendra $d(a, b) = 4$, l'unité graphique étant le centimètre.)

b. Même question lorsque A est réduite au point a, et que B est la droite orthogonale en b à $\overrightarrow{ab}$.

c. Même question lorsque A et B sont des droites sécantes en un point o.

d. On considère un carré $acbd$ admettant ab pour diagonale. Soit C le quart de cercle de centre d ayant pour extrémités a et b, A et B les demi-droites portées respectivement par ac et bc, d'origine a et b, et ne contenant pas c. Placer A, B, C sur une même figure, préciser les zones d'attraction des parties A, B, C relatives à P = A ∪ B ∪ C, ainsi que les lignes de distance à P. Ces lignes sont-elles des courbes de classe C^1 ?

e. On considère maintenant un triangle aba' rectangle en a et isocèle; soit b' le symétrique de a' par rapport au milieu de ab. On prend pour partie A la réunion du segment $[a, a']$ et du quart de cercle de centre b ayant pour extrémités a et b', pour partie B la symétrique de A par rapport au milieu de ab. Placer A et B sur une même figure, déterminer la médiatrice M (A, B) et tracer quelques lignes de distance à P = A ∪ B.

III. Lignes de partage entre deux parties

Soient A et B deux parties fermées non vides de E disjointes.

On se propose d'étudier les lignes de partage C (λ) entre A et B.

1. Distance de deux parties.

On appelle distance de A et B le nombre réel positif δ défini par la relation $\delta = \inf\limits_{u \in A,\, v \in B} d(u, v)$.

a. Prouver que si l'une des deux parties A et B, par exemple B, est compacte, alors il existe un point a de A et un point b de B tels que $d(a, b) = \delta$.

b. Donner un exemple où les parties A et B sont convexes et où δ = 0.

c. Prouver que pour tout point x de E,

$$d(x, A) + d(x, B) \geqslant \delta \quad \text{et} \quad d(x, A) + d(x, B) > 0$$

2. Propriétés topologiques des lignes de partage.

a. Montrer que pour tout point a de A et pour tout point b de B le segment $[a, b]$ coupe toute ligne de partage C (λ). On suppose en outre que $d(a, b) = \delta$; montrer que, pour tout élément λ de [0, 1], le point c_λ défini par la relation $\overrightarrow{ac_\lambda} = \lambda\, \overrightarrow{ab}$ appartient à la ligne de partage C (λ).

b. Prouver que, pour tout $\lambda \in]0, 1[$, l'ensemble C (λ) est une partie fermée de E d'intérieur vide.

3. Mise en œuvre de lieux géométriques usuels pour la recherche de lignes de partage.

a. Indiquer la nature des lignes de partage de deux points, puis d'un point et d'une droite.

b. On munit E d'un repère orthonormal $(o, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points $a = (2, 0)$, $a' = (2, 4)$ et leurs symétriques b et b' par rapport à o. Placer ces points sur une figure, l'unité graphique étant le centimètre. Soit A le segment $[a, a']$ et B le segment $[b, b']$. Tracer la médiatrice de A et B, c'est-à-dire la ligne de partage $C\left(\frac{1}{2}\right)$, et les lignes de partage $C\left(\frac{1}{4}\right)$ et $C\left(\frac{3}{4}\right)$.

4. Fonction canonique de partage.

Soit f la fonction numérique définie sur E par la relation

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}.$$

Cette fonction, à valeurs dans $[0, 1]$, est appelée fonction canonique de partage, car, pour tout élément λ de $[0, 1]$, la ligne de niveau $f(x) = \lambda$ n'est autre que la ligne de partage $C(\lambda)$.

a. Montrer que f est continue sur E.

b. On suppose que la distance δ de A et B est strictement positive. Montrer que f est lipschitzienne dans le rapport $\frac{1}{\delta}$.

5. Détermination des fonctions de partage.

On appelle fonction de partage une fonction continue sur E, à valeurs dans $[0, 1]$, admettant pour lignes de niveau les lignes de partage, s'annulant sur A et prenant la valeur 1 sur B.

a. Soit ω un homéomorphisme strictement croissant de $[0, 1]$ sur lui-même. Montrer que $\omega \circ f$ est une fonction de partage.

b. Inversement soit g une fonction de partage. On désigne par ω la fonction qui à tout élément λ de $[0, 1]$ associe la valeur de g sur $C(\lambda)$. Pour simplifier, on suppose que B est compacte.

Montrer que $g = \omega \circ f$, que ω est injective et que $\omega(0) = 0$ et $\omega(1) = 1$.

On considère un segment $[a, b]$, où $a \in A$ et $b \in B$, tel que $d(a, b) = \delta$, et, pour tout élément λ de $[0, 1]$, on définit c_λ comme au 2.*a*. Montrer que $\omega(\lambda) = g(c_\lambda)$; en déduire que ω est un homéomorphisme strictement croissant de $[0, 1]$ sur lui-même.

c. On suppose encore que B est compacte, et que g est une fonction de partage lipschitzienne dans un rapport ρ. Montrer que ω est lipschitzienne dans le rapport $\rho\,\delta$. En déduire que $\rho\,\delta \geqslant 1$; ainsi ρ est nécessairement supérieur à $\frac{1}{\delta}$.

Prouver enfin que si $\rho = \frac{1}{\delta}$, alors, pour tout élément λ de $[0, 1]$, $\omega(\lambda) = \lambda$. Ainsi, f est la seule fonction de partage lipschitzienne dans le rapport $\frac{1}{\delta}$.