SESSION DE 1985

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 5 heures

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats indiqués dans l'énoncé peuvent être utilisés par les candidats pour la suite du problème.

Notations et objectif du problème

On note P le plan euclidien orienté et Π l'ensemble des vecteurs de P. Le choix d'un point de P permet d'identifier P et Π. Les applications affines de P dans lui-même sont plus simplement appelées *applications affines* et sont notées par des lettres minuscules; les endomorphismes de Π associés sont appelés *endomorphismes* et sont notés par la lettre majuscule correspondante. On rappelle qu'une application affine f est déterminée par l'endomorphisme associé F et par l'image d'un point; lorsque f fixe un point, son étude est ramenée à celle de F. Pour qu'une application affine f soit une *transformation affine*, il faut et il suffit que F soit un *automorphisme*, ce qui revient à dire que le déterminant de F, noté det (F), est non nul; on dit alors que f et F sont *directs* si $\det(F) > 0$, et *indirects* si $\det(F) < 0$.

La symétrie orthogonale s par rapport à une droite D est appelée *réflexion* d'axe D; l'automorphisme orthogonal S associé est appelé réflexion d'axe Δ, où Δ désigne la direction de D.

Pour tout nombre réel θ, on note R_θ la *rotation* de Π dont θ est une mesure de l'angle; lorsque $\theta = \frac{\pi}{2}$, il s'agit du *quart de tour direct*, noté plus simplement R. Dans ces conditions, toute rotation R_θ s'écrit sous la forme $R_\theta = \cos\theta\ I + \sin\theta\ R$, où I désigne l'identité.

La donnée d'un *parallélogramme* (ordonné) $\Gamma = (O, J, K, L)$ de P, où $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{OL}$, équivaut à celle de $(O, \vec{u}, \vec{v})$, où $\vec{u} = \overrightarrow{OJ}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OL}$. Dans toute la suite, on suppose que Γ n'est pas aplati, ce qui revient à dire que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base. Si cette base est directe, on dit que Γ est direct; dans le cas contraire, on dit que Γ est indirect. Lorsque Γ est un carré, on dit que $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est un *repère carré*, ou encore que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une *base carrée*, ce qui revient à dire que $\vec{v} = R(\vec{u})$ si cette base est directe, et $\vec{v} = -R(\vec{u})$ dans le cas contraire.

L'objectif du problème est d'étudier les décompositions d'une transformation affine de P en transformations élémentaires, notamment les similitudes et les affinités orthogonales, ce qui fait l'objet des parties IV et V, la partie II étant consacrée à quelques résultats élémentaires. A cet effet, on utilise un outil géométrique, à savoir l'action des transformations sur les parallélogrammes et sur les carrés (cf. parties I et V), et un outil algébrique, à savoir la décomposition d'un endomorphisme en somme de similitudes (cf. partie III).

I. Caractérisation des similitudes par leur action sur les carrés

On dit qu'une transformation affine g est une *similitude* de rapport ρ si l'automorphisme associé G est de la forme $G = \rho U$, où $\rho > 0$ et où U est un automorphisme orthogonal, dit associé à g. Dans ces conditions, on dit aussi que G est une similitude.

1. Prouver que l'image d'un parallélogramme par une transformation affine f est encore un parallélogramme. Étant donné des parallélogrammes Γ et Γ', établir l'existence et l'unicité d'une transformation affine transformant Γ en Γ'.

2. Soient g une transformation affine et G l'automorphisme associé. Montrer qu'il est équivalent de dire :

   a) La transformation g est une similitude directe de P;

   b) Il existe un carré direct dont l'image par g est un carré direct;

   c) Les automorphismes G et R commutent;

   d) L'image par g de tout carré direct est un carré direct.

Tournez la page S. V. P.

3. Caractériser de même les similitudes indirectes.

4. Soit $(O, \vec{u}, \vec{v})$ un repère non carré; montrer que $(O, \vec{u} + R(\vec{v}), \vec{v} - R(\vec{u}))$ est un repère carré indirect, que $(O, \vec{u} - R(\vec{v}), \vec{v} + R(\vec{u}))$ est un repère carré direct, et que ce dernier repère se déduit du précédent par une similitude indirecte. Exprimer le rapport ρ de cette similitude et déterminer l'axe Δ de la réflexion associée U. Le plan P étant rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, mettre en place sur une même figure les trois repères précédents et les parallélogrammes associés lorsque $\vec{u} = (3, 2)$ et $\vec{v} = (6, -1)$; expliciter ρ et Δ. On prendra l'unité de longueur égale à 1 cm.

II. Affinités orthogonales; composition, conjugaison

Étant donné une droite D de P et un nombre réel λ *non nul*, on appelle *affinité orthogonale* d'axe D et de rapport λ la transformation affine a de P qui, à tout point M, associe le point N défini par la relation $\overrightarrow{HN} = \lambda\overrightarrow{HM}$, où H est la projection orthogonale de M sur D. L'automorphisme A associé est appelé affinité orthogonale d'axe Δ et de rapport λ, où Δ est la direction de D.

Dans cette partie, on considère des affinités de rapport différent de 1.

1. *Composée de deux affinités orthogonales.*

Soient a_1 et a_2 des affinités orthogonales d'axes respectifs D_1 et D_2 et de rapports respectifs λ_1 et λ_2. Soit f la composée de a_1 et a_2, notée $f = a_2 a_1$.

a. Déterminer la nature de f lorsque D_1 et D_2 sont parallèles et préciser l'ensemble des points fixes de f.

b. Montrer que D_1 et D_2 sont sécantes si et seulement si f admet un point fixe et un seul.

2. *Caractérisation du cas où ces affinités commutent.*

a. Déterminer toutes les droites stables par une affinité orthogonale a.

b. Prouver que si deux transformations affines f_1 et f_2 commutent (c'est-à-dire sont telles que $f_2 f_1 = f_1 f_2$) l'ensemble des points fixes de f_1 est stable par f_2.

c. Caractériser géométriquement les couples (a_1, a_2) d'affinités orthogonales tels que a_1 et a_2 commutent.

3. *Effet d'une conjugaison sur une affinité.*

Soit a une affinité orthogonale d'axe D et de rapport λ. Préciser la nature de la transformation $a' = gag^{-1}$, où g est une similitude (on pourra d'abord déterminer les droites stables par a'). Que se passe-t-il si on suppose seulement que g est une transformation affine?

III. Décomposition d'un endomorphisme en somme de similitudes

L'objectif de cette partie est d'étudier la décomposition d'un endomorphisme en somme d'une similitude directe et d'une similitude indirecte et, à partir de là, de caractériser les endomorphismes symétriques, c'est-à-dire les endomorphismes B tels que, pour tout couple $(\vec{u}, \vec{v})$ de vecteurs, $B(\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.B(\vec{v})$.

On note $\mathcal{L}(\Pi)$ l'algèbre des endomorphismes de Π.

1. *Opération du quart de tour direct par conjugaison.*

A tout endomorphisme F on associe l'endomorphisme $\sigma(F) = RFR^{-1}$.

a. Vérifier que $\sigma \circ \sigma$ est l'identité de $\mathcal{L}(\Pi)$.

b. Soit $\mathcal{S}_+$ (resp $\mathcal{S}_-$) le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\Pi)$ constitué des endomorphismes G tels que $\sigma(G) = G$ (resp. $\sigma(G) = -G$). Prouver que $\mathcal{L}(\Pi)$ est somme directe des sous-espaces vectoriels $\mathcal{S}_+$ et $\mathcal{S}_-$, les projecteurs associés étant $F \longmapsto \frac{1}{2}(F + RFR^{-1})$ et $F \longmapsto \frac{1}{2}(F - RFR^{-1})$.

c. Vérifier que les éléments non nuls de $\mathcal{S}_+$ (resp. de $\mathcal{S}_-$) sont les similitudes directes (resp. indirectes).

2. *Écriture canonique d'un endomorphisme.*

   a. Établir que tout endomorphisme F peut s'écrire sous la forme (dite canonique)
$$F = \alpha I + \beta R + \gamma S$$
   où α, β, γ sont des nombres réels, et où S est une réflexion. Étudier l'unicité d'une telle écriture, en distinguant deux cas suivant que F appartient à $\mathcal{S}_+$ ou non. On observera que $\gamma S = (-\gamma)(-S)$.

   b. Dans ces conditions, expliciter la matrice associée à F dans une base orthonormale directe $(\vec{i}, \vec{j})$ telle que $S(\vec{i}) = \vec{i}$. Calculer le déterminant et le polynôme caractéristique de F en fonction de α, β et γ.

   c. Caractériser les triplets (α, β, γ) tels que F soit symétrique; préciser alors les valeurs propres et les sous-espaces propres de F.

IV. Décompositions des transformations symétriques ayant un point fixe

Les transformations considérées dans cette partie ont un point fixe donné O. Pour tout nombre réel λ non nul, l'homothétie de centre O et de rapport λ est notée h_λ.

1. *Caractérisation des affinités orthogonales.*

   a. Prouver que toute affinité orthogonale A est un endomorphisme symétrique.

   b. Étant donné une réflexion S, caractériser les couples (α, γ) de nombres réels tels que $B = \alpha I + \gamma S$ soit une affinité orthogonale.

2. *Décomposition en produit d'une affinité orthogonale et d'une homothétie.*

   Soient b une transformation affine fixant O et B l'automorphisme associé. Prouver qu'il est équivalent de dire :

   a) La transformation b est symétrique, autrement dit, B est symétrique;

   b) La transformation b peut s'écrire sous la forme $b = h_\lambda a$, où $\lambda \neq 0$ et où a est une affinité orthogonale dont l'axe D passe par O.

   Montrer que, dans ces conditions, λ est une valeur propre de B, et étudier l'unicité d'une telle décomposition, en distinguant deux cas selon que b est une homothétie ou non.

3. *Décomposition en produit de deux affinités orthogonales.*

   Prouver qu'il est équivalent de dire :

   a) La transformation b est symétrique;

   b) La transformation b peut s'écrire sous la forme $b = a_2 a_1$, où a_1 et a_2 sont des affinités orthogonales dont les axes D_1 et D_2 sont orthogonaux et passent par O.

   Préciser alors les droites D_1 et D_2 ainsi que les rapports λ_1 et λ_2 de ces affinités.

V. Décompositions des transformations ayant un point fixe

Dans les cinq premières questions de cette partie, on étudie une transformation affine f ayant un point fixe O en exploitant l'écriture canonique de F.

1. *Décomposition en produit d'une réflexion et d'une transformation symétrique.*

   a. Déterminer toutes les réflexions S_1 telles que FS_1 soit symétrique. A cet effet, on pourra utiliser l'écriture canonique de F et on distinguera deux cas selon que F est une similitude directe ou non.

   b. En déduire que f peut s'écrire sous la forme $f = bs$, où b est symétrique et fixe O, et où s est une réflexion dont l'axe passe par O. Étudier l'unicité d'une telle décomposition.

2. *Décomposition en produit d'une similitude indirecte et d'une affinité orthogonale.*

   Établir que f peut s'écrire sous la forme $f = ag$, où a est une affinité orthogonale dont l'axe passe par O, et où g est une similitude indirecte de centre O. Étudier l'unicité d'une telle décomposition lorsque f n'est pas une similitude; examiner aussi les cas où f est une similitude indirecte, ou directe.

Tournez la page S. V. P.

3. *Interprétation géométrique de cette dernière décomposition.*

Dans cette question, on suppose que f n'est pas une similitude, et on fixe une base orthonormale directe $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$.

a. Prouver que la recherche d'un couple (a, g) tel que $f = ag$ équivaut à celle d'une affinité orthogonale $A = \alpha' I + \gamma' S'$, et d'une base carrée directe $(\vec{i}, \vec{j})$ telles que $A(\vec{i}) = \vec{u}$ et $A(\vec{j}) = -\vec{v}$, où $\vec{u} = F(\vec{e_1})$ et $\vec{v} = F(\vec{e_2})$.

b. En appliquant à A les résultats de III.1, montrer que $\vec{i}$ est colinéaire à $\vec{u} + R(\vec{v})$ et que $S'(\vec{i})$ est colinéaire à $\vec{u} - R(\vec{v})$.

c. Lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont les vecteurs indiqués dans la question I.4, déterminer tous les triplets $(A, \vec{i}, \vec{j})$ satisfaisant aux conditions précédentes; pour chacun d'eux, reprendre la figure du I.4, expliciter $(\vec{i}, \vec{j})$ ainsi que l'axe de A, et donner le rapport de A.

4. *Décomposition en produit d'affinités orthogonales.*

Montrer que f peut s'écrire sous la forme $f = a_2\, a_1\, s$, où a_1 et a_2 sont des affinités orthogonales d'axes orthogonaux passant par O, et s est une réflexion d'axe passant par O.

5. *Existence d'une décomposition en produit de deux affinités orthogonales.*

L'objectif est de caractériser les automorphismes F qui peuvent s'écrire comme produit de deux affinités orthogonales. A cet effet, on écrit F sous la forme canonique $F = \alpha I + \beta R + \gamma S$. Le cas des endomorphismes symétriques étant déjà traité, on suppose que $\beta \neq 0$.

a. En écrivant les affinités sous forme canonique, étudier le cas où F est une similitude directe, c'est-à-dire où $\gamma = 0$. Désormais on écarte ce cas.

b. Soit R_θ une rotation. Prouver que l'existence d'une décomposition de F équivaut à celle d'une décomposition de $R_\theta F R_\theta^{-1}$.

c. Calculer $R_\theta F R_\theta^{-1}$. En déduire que $F' = \alpha' I + \beta' R + \gamma' S'$ est conjugué de F par rotation si et seulement si $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$, et $\gamma' = \pm \gamma$, c'est-à-dire si $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$ et $\det(F') = \det(F)$. On posera désormais $\delta = \det(F)$.

d. Vu ces résultats, on est ramené au problème suivant : existe-t-il des affinités orthogonales A_1 et A_2 telles que l'automorphisme $F' = A_2 A_1$ satisfasse aux conditions énoncées au *c*? Soient alors λ_1 et λ_2 les rapports de A_1 et A_2, D_1 et D_2 leurs axes et φ une mesure de l'angle (D_1, D_2). En écrivant A_1 et A_2 sous forme canonique, montrer que tout revient à déterminer un triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \varphi)$ de nombres réels tels que

$$\left\{\begin{aligned} \lambda_1\lambda_2 &= \delta \\ (1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\sin^2\varphi &= \delta - 2\alpha + 1 \\ (1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\sin\varphi\cos\varphi &= 2\beta \end{aligned}\right.$$

e. On pose $\tau = \delta - 2\alpha + 1$. Montrer que $\tau = 0$ si et seulement si 1 est valeur propre de F, et que, dans ce cas, la décomposition est impossible.

f. On écarte désormais ce cas, et on prend φ tel que $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\tau}{2\beta}$. Calculer $\lambda_1 + \lambda_2$ en fonction de β, δ et τ et en déduire la condition d'existence d'un couple (λ_1, λ_2) de nombres réels satisfaisant aux conditions du *d*.

6. Étudier enfin les décompositions d'une transformation affine quelconque f. On établira d'abord que f admet un point fixe et un seul si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de F, c'est-à-dire si $\tau \neq 0$.