SESSION DE 1984

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 5 heures)

Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel euclidien orienté, de dimension 3 sur le corps R des réels. On considère l'espace vectoriel produit $\mathrm{R} \times \mathcal{V}$, de dimension 4 sur R, dont les éléments sont les couples $(x, \vec{\mathrm{U}})$ où x est un réel et $\vec{\mathrm{U}}$ un vecteur de $\mathcal{V}$. On définit sur $\mathrm{R} \times \mathcal{V}$ une multiplication par :

$$(x, \vec{\mathrm{U}})\,(y, \vec{\mathrm{V}}) = (xy - \vec{\mathrm{U}}.\vec{\mathrm{V}},\ x\vec{\mathrm{V}} + y\vec{\mathrm{U}} + \vec{\mathrm{U}} \wedge \vec{\mathrm{V}})$$

pour tous réels x et y, pour tous vecteurs $\vec{\mathrm{U}}$ et $\vec{\mathrm{V}}$ de $\mathcal{V}$, où $\vec{\mathrm{U}}.\vec{\mathrm{V}}$ et $\vec{\mathrm{U}} \wedge \vec{\mathrm{V}}$ désignent respectivement le produit scalaire et le produit vectoriel de $\vec{\mathrm{U}}$ par $\vec{\mathrm{V}}$.

Cette multiplication a pour élément neutre $e = (1, \vec{0})$; l'espace vectoriel $\mathrm{R} \times \mathcal{V}$ muni de la multiplication est noté **H** et ses éléments sont appelés les *quaternions*.

I

1.1. Déterminer les quaternions $q = (x, \vec{\mathrm{U}})$ tels que $q^2 = e$, puis ceux tels que $q^2 = -e$.

1.2. Soit $\vec{\mathrm{I}}, \vec{\mathrm{J}}, \vec{\mathrm{K}}$ trois vecteurs de $\mathcal{V}$.

1.2.*a*. Montrer que $(\vec{\mathrm{I}}, \vec{\mathrm{J}}, \vec{\mathrm{K}})$ est une base orthonormale directe de $\mathcal{V}$ si et seulement si les trois quaternions $i = (0, \vec{\mathrm{I}})$, $j = (0, \vec{\mathrm{J}})$, $k = (0, \vec{\mathrm{K}})$ vérifient :

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = -e \\ ij = k \end{cases}$$

1.2.*b*. Lorsqu'il en est ainsi, vérifier que $ji = -k$ et calculer k^2, jk, kj, ki et ik.

Vérifier les cinq égalités :

$$i^2 i = i i^2, \quad i^2 j = i(ij), \quad (ij)\, i = i(ji), \quad (ij)\, j = ij^2, \quad (ij)\, k = i(jk)$$

1.2.*c*. En déduire sans autre calcul que la multiplication de **H** est associative. [On pourra utiliser le fait (évident) que la multiplication est une application bilinéaire de $\mathbf{H} \times \mathbf{H}$ dans **H**].

1.3. Étant donné un quaternion $q = (x, \vec{\mathrm{U}})$, déterminer les quaternions $r = (y, \vec{\mathrm{V}})$ tels que $rq = qr$.

En déduire les quaternions q tels que $rq = qr$ pour tout quaternion r; ces quaternions sont dits *réels*.

Tournez la page S. V. P.

1.4. Montrer que l'addition et la multiplication de $\mathbf{H}$ lui confèrent la structure de corps (non commutatif).

1.5. A tout quaternion $q = (x, \vec{U})$ on associe son *conjugué* $\bar{q} = (x, -\vec{U})$ et le réel $N(q) = x^2 + \vec{U}.\vec{U}$. Ainsi les quaternions égaux à leur conjugué sont les quaternions réels. Les quaternions opposés à leur conjugué, c'est-à-dire de la forme $(0, \vec{U})$ sont dits *purs*.

1.5.*a*. Exprimer les produits $q\bar{q}$ et $\bar{q}q$ en fonction de $N(q)$.

1.5.*b*. Exprimer le conjugué $\overline{qr}$ du produit qr de deux quaternions q et r quelconques en fonction des conjugués $\bar{q}$ et $\bar{r}$. En déduire $N(qr)$ en fonction de $N(q)$ et $N(r)$.

1.5.*c*. Montrer que les quaternions q tels que $N(q) = 1$ forment un groupe pour la multiplication des quaternions. *Ce groupe est noté* S *dans toute la suite.*

1.5.*d*. Montrer que pour tout quaternion q non nul il existe un unique couple (ρ, u) où ρ est un réel positif et u un quaternion de S tel que $q = \rho u$.

1.6. L'application $q \longmapsto \sqrt{N(q)}$ de $\mathbf{H}$ dans $\mathbf{R}$ est une norme euclidienne. Ceci permet de considérer aussi dorénavant $\mathbf{H}$ comme un espace euclidien pour cette norme.

Soit $q = (0, \vec{U})$ et $r = (0, \vec{V})$ deux quaternions purs. Exprimer le produit scalaire de q et r (pour la structure euclidienne ci-dessus de $\mathbf{H}$) en fonction de $\vec{U}$ et $\vec{V}$.

Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

(*i*) q et r sont orthogonaux;

(*ii*) Le produit qr est un quaternion pur;

(*iii*) $qr + rq = 0$.

II

2.1.*a*. Soit θ un nombre réel et $\vec{I}$ un vecteur unitaire de $\mathcal{V}$. On considère le quaternion $s = (\cos\theta, \sin\theta\,\vec{I})$ de S et l'application φ_s de $\mathbf{H}$ dans lui-même définie par $\varphi_s(q) = sqs^{-1}$ pour tout quaternion q.

Montrer que, si $q = (x, \vec{U})$ et si $\varphi_s(q) = (x', \vec{U'})$, alors :

$$x' = x \qquad \text{et} \qquad \vec{U'} = R_s(\vec{U}),$$

où R_s est une rotation de $\mathcal{V}$, ne dépendant pas de q, laissant $\vec{I}$ fixe, et dont on précisera l'angle.

2.1.*b*. Vérifier que par $s \longmapsto R_s$ on établit un morphisme surjectif du groupe S sur le groupe O^+ des rotations de $\mathcal{V}$. Quel est le noyau de ce morphisme?

En déduire un isomorphisme faisant intervenir les groupes S et O^+.

2.2.*a*. Montrer que si p et q sont deux quaternions purs de S, alors il existe un quaternion s de S tel que $q = sps^{-1}$. Le quaternion s peut-il être choisi pur?

2.2.*b*. Démontrer que tout quaternion de S est produit de deux quaternions purs de S.

2.3. On se propose de démontrer qu'il existe un seul morphisme de O^+ dans S. Pour cela on considère la partie Σ de O^+ formée des rotations d'angle π.

2.3.*a*. Soit ψ un morphisme de O^+ dans S. Montrer que pour tout σ de Σ on a $\psi(\sigma) = e$ ou $\psi(\sigma) = -e$.

2.3.*b*. Montrer que si σ et σ' sont deux éléments de Σ il existe un élément σ'' de Σ tel que $\sigma' = \sigma'' \circ \sigma \circ \sigma''$. En déduire que $\psi(\sigma) = \psi(\sigma')$.

2.3.*c*. Montrer que $\psi(O^+) = \{e\}$.

2.4. Soit G un sous-groupe distingué de S. On suppose que G contient un élément distinct de e et de $-e$. On se propose de démontrer que $G = S$. On pourra utiliser le fait qu'un sous-groupe G de S est distingué si et seulement si $\varphi_s(G) \subset G$ pour tout s de S.

2.4.*a*. Montrer à l'aide de 2.2. que, si G contient un quaternion pur, alors $G = S$.

2.4.*b*. On considère deux quaternions purs i et j de S orthogonaux (selon la définition donnée en 1.6.) et $k = ij = -ji$. On suppose que G contient un quaternion $ae + bi$, où a et b sont deux réels non nuls (avec $a^2 + b^2 = 1$).

Montrer que G contient $ae + bj$, puis $a^2e + ci$, avec $c = b\sqrt{1 + a^2}$. En déduire que G contient un quaternion $s = \alpha e + \beta i$ où α et β sont deux réels tels que $0 < \alpha \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Montrer que G contient un quaternion pur. (On le cherchera sous la forme $sqs^{-1}q^{-1}$, où $q = xe + yj$, avec x et y réels, est un élément de S).

2.4.*c*. Montrer que $G = S$.

En déduire que O^+ n'a pas de sous-groupes distingués non triviaux.

III

3.1. Vérifier que l'application $\varphi_s : q \longrightarrow sqs^{-1}$ est un automorphisme du corps et de l'espace vectoriel $\mathbf{H}$.

3.2. Soit τ un morphisme du corps $\mathbb{R}$ des réels dans lui-même (en particulier, on a $\tau(1) = 1$).

3.2.*a*. Montrer que $\tau(r) = r$ pour tout rationnel r.

3.2.*b*. Montrer que si x est un réel positif, il en est de même pour $\tau(x)$. En déduire que τ est croissant.

3.2.*c*. Montrer que τ est l'identité.

3.3. Soit μ un automorphisme du corps $\mathbf{H}$ des quaternions.

3.3.*a*. Montrer que μ laisse stable l'ensemble des quaternions réels, puis, qu'il laisse fixe tout quaternion réel. En déduire que μ est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathbf{H}$ sur $\mathbb{R}$.

3.3.*b*. Soit q et r deux quaternions purs et orthogonaux de S. Montrer que $\mu(q)$ et $\mu(r)$ sont encore purs, orthogonaux et dans S.

Soit q' et r' deux quaternions purs et orthogonaux de S. Démontrer qu'il existe un unique automorphisme du corps $\mathbf{H}$ transformant q en q' et r en r'.

3.3.*c*. Montrer qu'il existe un s de S tel que $\mu = \varphi_s$.

IV

4.1. On considère une base orthonormale (e, i, j, ij) de $\mathbf{H}$.

4.1.*a*. Soit $r = ae + bi$ où a et b sont deux réels tels que $a^2 + b^2 = 1$. Démontrer que l'application δ_r de $\mathbf{H}$ dans lui-même définie par $\delta_r(q) = rq$ pour tout quaternion q est une transformation orthogonale directe de l'espace euclidien $\mathbf{H}$ en donnant sa matrice dans la base (e, i, j, ij).

Montrer plus généralement qu'il en est de même pour l'application $\delta_{r,s}$ de $\mathbf{H}$ dans lui-même définie pour tous r et s de S par $\delta_{r,s}(q) = rqs^{-1}$ pour tout quaternion q.

Tournez la page S. V. P.

4.1.*b*. Vérifier que par $(r, s) \longrightarrow \delta_{r,s}$ on établit un morphisme surjectif du groupe produit $S \times S$ sur le groupe Ω des transformations orthogonales directes de l'espace euclidien **H** (on pourra utiliser le fait que, d'après le 2.1.*b*., les éléments de Ω qui laissent e fixe sont les φ_s).

Quel est le noyau de ce morphisme?

En déduire un isomorphisme faisant intervenir $S \times S$ et Ω.

4.2.*a*. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les quaternions r et s de S pour que $\delta_{r,s}$ soit une involution distincte de $\mathrm{Id}_{\mathbf{H}}$ (identité de **H**) et de $-\mathrm{Id}_{\mathbf{H}}$.

4.2.*b*. Montrer que tout élément de Ω est produit de deux symétries orthogonales de **H** par rapport à des plans vectoriels.

4.2.*c*. En déduire les morphismes de Ω dans $S \times S$.

4.3.*a*. Donner un exemple de groupe produit $G \times G$ possédant un sous-groupe distingué qui n'est pas le produit $H_1 \times H_2$ de deux sous-groupes distingués H_1 et H_2 de G.

4.3.*b*. Dans toute la suite K est un sous-groupe distingué du groupe produit $S \times S$. On note K_1 et K_2 les images respectives de K par les applications $(r, s) \longrightarrow r$ et $(r, s) \longrightarrow s$ de $S \times S$ dans S. Vérifier que K_1 et K_2 sont deux sous-groupes distingués de S et que K est un sous-groupe distingué de $K_1 \times K_2$.

4.3.*c*. Déterminer K lorsque $K_1 = \{e\}$, puis lorsque $K_1 = K_2 = \{e, -e\}$.

4.3.*d*. Montrer les résultats suivants :

(*i*). S'il existe un quaternion pur p tel que (e, p) soit un élément de K, alors $\{e\} \times S$ est inclus dans K. En déduire qu'alors $K = K_1 \times K_2$.

(*ii*). S'il existe un quaternion pur p tel que $(-e, p)$ soit un élément de K, alors il existe un quaternion pur p' tel que (e, p') soit dans K.

(*iii*). S'il existe un quaternion non réel s tel que $(-e, s)$ soit dans K, alors il existe un quaternion pur p tel que (e, p) soit dans K.

(*iv*). Si $K_1 = K_2 = S$, alors il existe un quaternion non réel s tel que $(-e, s)$ soit dans K (on pourra considérer le carré d'un élément (p, r) de K, avec p pur).

4.3.*e*. Donner le nombre et la liste des sous-groupes distingués de $S \times S$, puis de Ω.