SESSION DE 1984

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 5 heures

Si une application f est dérivable, on désigne par f' sa dérivée; on désigne par $f^{(k)}$ sa dérivée k-ième lorsque f est k fois dérivable.

On désigne par E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans lui-même indéfiniment dérivables.

Étant donné deux réels α et λ avec $|\lambda| \leqslant 1$, on désigne par $E_{\alpha,\lambda}$ l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}$ dans lui-même, dérivables et telles que pour tout réel t :

$$f'(t) = e^{\alpha t} f(\lambda t).$$

Question préliminaire : démontrer que $E_{\alpha,\lambda}$ est un sous-espace vectoriel de E.

I

1. On suppose dans cette question que $\lambda = 1$ et que α est un paramètre réel quelconque.

a. Déterminer les éléments de $E_{\alpha,1}$.

On note f_α l'unique élément de $E_{\alpha,1}$ tel que $f_\alpha(0) = 1$ et C_α le graphe de f_α.

b. Étudier, selon la valeur de α, les variations de f_α et son comportement en $+\infty$ et en $-\infty$.

Déterminer le sens de la concavité et la position respective des graphes C_α.

c. Représenter graphiquement sur une même figure les fonctions f_1, f_0, $f_{-1/2}$, f_{-2} en marquant précisément les asymptotes, les points d'inflexion et la tangente au point (0,1) [on prendra pour unité 2 cm].

2. On suppose dans cette question que $\lambda = -1$ et que α est toujours un paramètre réel quelconque.

a. Soit f un élément arbitraire de $E_{\alpha,-1}$. Déterminer une équation différentielle (L_α) linéaire du second ordre à coefficients constants dont f est solution.

b. Déterminer les éléments de E solutions de (L_α).

Dans chacun des trois cas : $|\alpha| \neq 2$, $\alpha = 2$, $\alpha = -2$, préciser quelles sont parmi les solutions de (L_α) les applications f appartenant à $E_{\alpha,-1}$. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $E_{\alpha,-1}$?

Tournez la page S. V. P.

II

Dans toute cette partie, on donne un réel λ tel que $0 < \lambda < 1$.

1. Dans cette question α est un réel strictement positif fixé.

On considère une application f non nulle élément de $E_{\alpha,\lambda}$ (l'existence d'une telle application sera démontrée au III). On se propose de démontrer que f admet une limite finie en $-\infty$.

a. Démontrer que pour tous réels a et t :

$$f(t) = f(a) + \int_a^t e^{\alpha u} f(\lambda u)\, du$$

b. On suppose que f n'est pas bornée sur $]-\infty, 0]$.

Un réel A négatif étant donné, montrer qu'il existe un réel $B < A$ pour lequel $|f(B)| > 2\,|f(A)|$ et $|f(B)|$ est le maximum de $|f|$ sur le segment $[B, 0]$. En déduire que :

$$|f(B)| < \frac{2\,e^{\alpha A}}{\alpha}\,|f(B)|\,.$$

Démontrer que l'hypothèse « f non bornée sur $]-\infty, 0]$ » est contradictoire avec l'appartenance de f à $E_{\alpha,\lambda}$.

Donc f est bornée sur $]-\infty, 0]$.

c. Démontrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{0} |f'(t)|\, dt$ converge et en déduire que f a une limite finie en $-\infty$.

2. Dans cette question on donne un réel $\alpha \geqslant 1$.

On considère une application f élément de $E_{\alpha,\lambda}$ telle que $f(0) > 0$ (l'existence d'une telle fonction sera démontrée au III). On pourra utiliser dans les démonstrations l'égalité déduite du II.1.*a* :

$$f(t) = f(0) + \int_0^t e^{\alpha u} f(\lambda u)\, du\,.$$

a. Démontrer qu'il existe un réel β strictement positif tel que $f(t)$ soit strictement positif pour tout t de $[0, \beta]$, puis, qu'il en est encore ainsi pour tout t de $\left[0, \dfrac{\beta}{\lambda}\right]$. En déduire que $f(t)$ est strictement positif pour tout réel t positif.

b. Démontrer qu'il existe un réel γ strictement négatif pour lequel $0 < f(t) < f(0)$ pour tout t de $[\gamma, 0[$, puis, qu'il en est encore ainsi pour tout t de $\left[\dfrac{\gamma}{\lambda}, 0\right[$.

En déduire que pour tout réel t strictement négatif :

$$\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) f(0) < f(t) < f(0)\,.$$

c. Donner les variations de f et de f'. Étudier le comportement de f en $+\infty$ (limite et direction asymptotique). Démontrer que f admet une limite strictement positive en $-\infty$, si $\alpha > 1$.

d. Comment les résultats du *c.* sont-ils modifiés dans le cas où $f(0)$ est strictement négatif ?

3. *a.* Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans lui-même et g l'application de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(\ln x)$.

Démontrer que f est un élément de $E_{\alpha,\lambda}$ si et seulement si g est dérivable et vérifie pour tout réel x strictement positif :

$$g'(x) = x^{\alpha - 1}\, g(x^{\lambda})\,.$$

On suppose dorénavant $\alpha = 1$ et on étudie une fonction g vérifiant la condition précédente et telle que $g'(1) = 1$.

b. Donner les variations et le signe de g, de sa dérivée, puis de la fonction u définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$u(x) = g(x) - x$$

Démontrer que g admet un prolongement continu en 0, par une valeur l strictement positive.

Étudier le signe de $(\lambda + 1)\, g(x) - x^{\lambda+1} - \lambda$ pour x positif; en déduire un majorant de l et la limite de $\dfrac{g(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

c. On considère l'application h définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$h(x) = \frac{g(x)}{x^{\frac{1}{1-\lambda}}}.$$

Démontrer que le signe de $h'\left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right)$ est celui de :

$$k(x) = (1 - \lambda)\, x^{\frac{1}{\lambda}}\, g(x) - g\left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right).$$

Établir une relation entre $k'(x)$ et $k(x^{\lambda})$; en déduire que h est décroissante, et étudier le signe de $g(x) - x^{\frac{1}{1-\lambda}}$, puis celui de :

$$g(x) - (1 - \lambda)^2\, x^{\frac{1}{1-\lambda}} - \lambda x - \lambda(1 - \lambda).$$

d. Dans le cas $\lambda = \dfrac{1}{2}$, représenter graphiquement les fonctions qui à x positif associent :

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\, x^{\frac{3}{2}}, \qquad \frac{1}{4}(x + 1)^2, \qquad g(x)$$

(on prendra pour unité 10 cm).

Donner les développements limités à l'ordre deux au voisinage de 1 de g, puis des fonctions g_1 et g_2 définies sur $]1, +\infty[$ par :

$$g_1(x) = \frac{x^2 - 1}{2 \ln x},$$

$$g_2(x) = \frac{x^2}{1 + \ln x}.$$

Montrer que, sur $]1, +\infty[$, on a $g_1'(x) < g_1(\sqrt{x})$ et $g_2'(x) > g_2(\sqrt{x})$, et démontrer que $g(x)$ est entre $g_1(x)$ et $g_2(x)$.

III

Dans toute cette partie on donne deux réels α et λ avec $|\lambda| < 1$.

1\. *a.* On suppose qu'il existe une série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ convergente sur $\mathbb{R}$ dont la somme f, définie pour tout réel t par :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

est un élément de $E_{\alpha,\lambda}$.

A l'aide du développement en série entière de la fonction $t \longmapsto e^{\alpha t}$, établir une relation de récurrence donnant a_n en fonction de $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ pour tout entier n strictement positif.

Tournez la page S. V. P.

b. Un réel y_0 est fixé arbitrairement. La relation de récurrence de la question précédente définit une unique suite de premier terme y_0; on note cette suite (a_n).

Démontrer que si pour un entier n strictement positif et pour un réel H_1 on a pour tout entier naturel $k \leqslant n-1$:

$$|a_k| \leqslant |y_0| \frac{H_1^k}{k!}$$

alors on a aussi :

$$|a_n| \leqslant \frac{|y_0|}{n!} (|\alpha| + |\lambda| H_1)^{n-1}$$

En déduire qu'il existe un réel H tel que pour tout entier naturel n, on ait :

$$|a_n| \leqslant |y_0| \frac{H^n}{n!}$$

c. Démontrer qu'il existe une et une seule application f élément de $E_{\alpha,\lambda}$ développable en série entière convergente sur $\mathbb{R}$ et telle que $f(0)$ soit un réel y_0 donné.

2. Soit un élément f quelconque de $E_{\alpha,\lambda}$.

a. On considère un entier n strictement positif et un réel t. Calculer $f^{(n)}(t)$ en fonction des $f^{(k)}(\lambda t)$ pour les entiers naturels $k \leqslant n-1$.

b. On considère un réel A strictement positif et on note M le maximum de $|f|$ sur $[-A, A]$. Par une méthode analogue à celle employée dans la question 1. *b.* précédente, démontrer qu'il existe un réel H tel que pour tout entier naturel n et pour tout réel t de $[-A, A]$ on ait :

$$|f^{(n)}(t)| \leqslant M H^n,$$

c. Justifier l'égalité pour tout réel t :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n.$$