

**Thème : Probabilités**  
**Calcul matriciel et probabilités**

### 1. L'exercice proposé au candidat

On suppose qu'un virus d'un type donné  $V$  peut, dans la génération suivante, subir une mutation vers un autre type dans 20% des cas. On suppose aussi qu'un virus d'un type autre que  $V$  subit une mutation vers le type  $V$  dans 30% des cas.

On s'intéresse à une population de virus qui, à la génération 0, comporte 50% de virus de type  $V$ . On note:

- $p_n$  la probabilité pour qu'un virus de cette population soit de type  $V$  à la génération  $n$  ;
- $q_n$  la probabilité pour qu'un tel virus soit d'un autre type que  $V$  à la génération  $n$ .

- 1) Dessiner le graphe décrivant les probabilités de transition et déterminer  $p_0$  et  $q_0$ .
- 2) Déterminer une matrice carrée  $A$  d'ordre 2 telle que 
$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$$
 et montrer que 
$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix}.$$
- 3) Soient  $B = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,6 \\ 0,4 & 0,4 \end{pmatrix}$  et  $C = I - B$ . Vérifier que  $A = B + \frac{1}{2}C$ .
- 4) Calculer  $B^2$ ,  $C^2$ ,  $BC$  et  $CB$ . En déduire que  $B^n = B$  et  $C^n = C$  pour tout  $n \geq 1$ .
- 5) En déduire une expression simple de  $A^n$  en fonction de  $B$  et  $C$  à l'aide de la formule du binôme de Newton.
- 6) Calculer les limites des suites  $(p_n)$  et  $(q_n)$ .

### 2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

*Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :*

- Q.1) Déterminer les connaissances mises en jeu qui relèvent du calcul matriciel et de la théorie des probabilités. A quel niveau l'exercice est-il destiné ?
- Q.2) Les limites des suites  $(p_n)$  et  $(q_n)$  auraient-elles été différentes avec une autre répartition de départ ?
- Q.3) Proposer une autre méthode pour calculer les limites des suites  $(p_n)$  et  $(q_n)$ .

*Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :*

- Sa réponse à la question Q.3)
- Un autre exercice sur le thème "Calcul matriciel et probabilités".