# Thème : Probabilités, Variables aléatoires

### 1. L'exercice proposé au candidat

Une urne $U_1$ contient deux jetons numérotés 1 et 2. Une urne $U_2$ contient quatre jetons numérotés 1, 2, 3 et 4.

1) On choisit au hasard une urne, puis un jeton dans cette urne (les choix sont supposés équiprobables).
   a) Quelle est la probabilité de tirer un jeton portant le numéro 1 ?
   b) On a tiré un jeton portant le numéro 1. Quelle est la probabilité qu'il provienne de l'urne $U_1$ ?
2) On rassemble maintenant les deux urnes en une seule, qui contient donc les six jetons précédents. On tire simultanément et au hasard deux jetons de cette urne. Les tirages sont équiprobables.
   a) Calculer la probabilité de tirer deux jetons portant des numéros identiques.
   b) Soit $S$ la variable aléatoire qui à chaque tirage associe la somme des numéros des deux jetons tirés. Prouver que la probabilité de l'événement $(S = 4)$ est $\frac{1}{5}$.
   c) Déterminer la loi de probabilité de $S$, et calculer l'espérance de $S$.

### 2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

***Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :***

$Q.1)$ Réaliser un arbre de probabilités pouvant servir de support à la résolution de la question 1). Donner des explications, accessibles à des élèves, sur cette construction.

$Q.2)$ Préciser les diverses notions utilisées dans l'exercice.

$Q.3)$ Indiquer comment on pourrait réaliser, à l'aide d'un tableur, une simulation du tirage décrit dans la question 1) de l'exercice.

***Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :***

i) Sa réponse à la question $Q.1)$.

ii) Deux exercices sur le thème : « **Probabilités, Variables aléatoires** ».

# 3. Quelques références aux programmes

## Programme de Seconde

| Contenus | Capacités attendues | Commentaires |
|---|---|---|
| **Statistiques**<br>Définition de la distribution des fréquences d'une série prenant un petit nombre de valeurs et de la fréquence d'un événement.<br>Simulation et fluctuation d'échantillonnage. | Concevoir et mettre en œuvre des simulations simples à partir de chiffres au hasard. | La touche « Random » d'une calculatrice pourra être présentée comme une procédure qui, chaque fois qu'on l'actionne, fournit une liste de $n$ chiffres (composant la partie décimale du nombre affiché). Si on appelle la procédure un très grand nombre de fois, la suite produite sera sans ordre ni périodicité et les fréquences des dix chiffres seront sensiblement égales.<br>Chaque élève produira des simulations de taille $n$ ($n$ allant de 0 à 100 suivant les cas) à partir de sa calculatrice). Ces simulations pourront être regroupées en une simulation ou plusieurs simulations de taille $N$, après avoir constaté la variabilité des résultats de chacune d'elles. L'enseignant pourra alors éventuellement donner les résultats de simulations de même taille $N$ préparés à l'avance et obtenus à partir de simulations sur ordinateur. |

## Classe de Première Scientifique

| Contenus | Modalités de mise en œuvre | Commentaires |
|---|---|---|
| Définition d'une loi de probabilité sur un ensemble fini. Espérance, variance, écart-type d'une loi de probabilité. Probabilité d'un événement, de la réunion et de l'intersection d'événements. Cas de l'équiprobabilité.<br>Variable aléatoire, loi d'une variable aléatoire, variance, écart-type.<br>Modélisation d'expériences aléatoires de référence (lancers d'un ou plusieurs dés ou pièces discernables ou non, tirage au hasard dans une urne, choix de chiffres au hasard, etc.). | Le lien entre loi de probabilité et distributions de fréquences sera éclairé par un énoncé vulgarisé de la loi des grands nombres. On expliquera ainsi la convergence des moyennes vers l'espérance et des variances empiriques vers les variances théoriques ; on illustrera ceci par des simulations dans des cas simples. On pourra aussi illustrer cette loi avec les diagrammes en boîtes obtenus en simulant par exemple 100 sondages de taille n, pour $n = 10$ ; $100$ ; $1000$.<br>On simulera des lois de probabilité simples obtenues comme images d'une loi équirépartie par une variable aléatoire (sondage, somme des faces de deux dés, etc.). | On pourra par exemple choisir comme énoncé vulgarisé de la loi des grands nombres la proposition suivante :<br>*Pour une expérience donnée, dans le modèle défini par une loi de probabilité $P$, les distributions des fréquences calculées sur des séries de taille n se rapprochent de $P$ quand n devient grand.*<br>On indiquera que simuler une expérience consiste à simuler un modèle de cette expérience. La modélisation avec des lois ne découlant pas d'une loi équirépartie est hors programme.<br>On évitera le calcul systématique et sans but précis de l'espérance et de la variance de lois de probabilité. |

## Classe de Terminale Scientifique

| Contenus | Modalités de mise en œuvre | Commentaires |
|---|---|---|
| **Conditionnement et indépendance**<br>Conditionnement par un événement de probabilité non nulle puis indépendance de deux événements.<br>Indépendance de deux variables aléatoires.<br>Formule des probabilités totales. | On justifiera la définition de la probabilité de $B$ sachant $A$, notée $P_A(B)$, par des calculs fréquentiels.<br>On utilisera à bon escient les représentations telles que tableaux, arbres, diagrammes... efficaces pour résoudre des problèmes de probabilités.<br>Application à la problématique des tests de dépistage en médecine et à la loi de l'équilibre génétique lors d'appariements au hasard. | Un arbre de probabilité correctement construit constitue une preuve.<br>Les élèves doivent savoir appliquer sans aide la formule des probabilités totales dans des cas simples. |