Thème : Probabilités conditionnelles

L'exercice

On considère un carré $ABCD$ et son centre O. On note $\Gamma = \{A, B, C, D, O\}$.
Une puce se déplace aléatoirement en sautant d'un point de Γ à un autre. La seule contrainte est que, si un saut relie deux sommets du carré, ceux-ci doivent être adjacents. A chaque saut, tous les déplacements sont équiprobables. La puce ne reste pas deux fois de suite au même endroit.
Au départ, c'est-à-dire avant son premier saut, la puce se trouve au point O.
Pour tout entier naturel n, on note O_n l'événement "la puce se trouve au point O à l'issue de son $n^{ième}$ saut". On note $p_n = \mathbb{P}(O_n)$; on a donc $p_0 = 1$.
On définit de même les événements A_n, B_n, C_n, D_n.

1) Calculer p_1 et p_2.

2) Pour tout entier naturel n, démontrer les égalités :

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(C_n) = \mathbb{P}(D_n) = \frac{1}{4}(1 - p_n)$$

3) a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n)$. (On pourra utiliser la formule des probabilités totales).

b) À l'aide de la calculatrice, émettre une conjecture concernant la limite de la suite (p_n).

4) a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $p_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

b) Calculer la limite de la suite (p_n). Cela valide-t-il la conjecture émise en 3)b) ?

Certaines réponses proposées par trois élèves

Élève 1

1) *Si la puce arrive sur le point A , c'est qu'avant elle était en B, en D ou en O. Pareil pour B (elle pouvait être avant en A, C ou O), pareil pour C et D. Par contre, pour arriver au point O, il y a 4 possibilités : la puce peut arriver de A, B, C ou D.*
En tout, on a $3 \times 4 + 4 = 16$ *chemins.*
Donc $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(D) = \frac{3}{16}$ *et* $\mathbb{P}(O) = \frac{4}{16}$*. On a bien :* $\frac{3}{16} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{4}{16}\right)$.
Avec le même raisonnement, on prouvera que

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(C_n) = \mathbb{P}(D_n) = \frac{1}{4}(1 - p_n).$$

Élève 2

2) *D'après la formule des probabilités totales :*
$\mathbb{P}(O_{n+1}) = \mathbb{P}(O_{n+1} \cap A_n) + \mathbb{P}(O_{n+1} \cap B_n) + \mathbb{P}(O_{n+1} \cap C_n) + \mathbb{P}(O_{n+1} \cap D_n)$ *d'où :*
$\mathbb{P}(O_{n+1}) = 4 \times p_{n+1} \times \frac{1}{3}$*, c'est-à-dire :* $p_{n+1} = \frac{4}{3} \times p_{n+1}$*. Il y a une erreur !*

Élève 3

2) *Je sais que :* $\mathbb{P}(O_{n+1}) = \mathbb{P}_{A_n}(O_{n+1}) + \mathbb{P}_{B_n}(O_{n+1}) + \mathbb{P}_{C_n}(O_{n+1}) + \mathbb{P}_{D_n}(O_{n+1}) + \mathbb{P}_{O_n}(O_{n+1})$
donc $p_{n+1} = \frac{1}{3}\mathbb{P}(A_n) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(B_n) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(C_n) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(D_n) + 0$
d'où $p_{n+1} = 4 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}(1 - p_n) = \frac{1}{3}(1 - p_n)$*. C'est bien ce qu'il fallait démontrer.*

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez la production de chaque élève en mettant en évidence la pertinence de sa démarche, l'origine de ses éventuelles erreurs et les moyens d'y remédier.

2- Proposez une correction des questions 2 et 3 telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

3- Présentez deux ou trois exercices sur le thème *probabilités conditionnelles*, dont l'un pourra faire appel à la mise en oeuvre d'un algorithme.