Thème : Outils
Les nombres complexes

1. L'exercice proposé au candidat

On se donne un rectangle $ABCD$ (direct) et on pose $AB = CD = a$, $AD = BC = b$ ($a > 0$, $b > 0$).

On se pose le problème suivant (cf fig.1) : existe-t-il un triangle équilatéral APQ inscrit dans le rectangle $ABCD$ (le point P appartenant au segment $[BC]$ et le point Q au segment $[CD]$) ?

1) Soit P un point quelconque de $[BC]$ et Q un point quelconque du segment $[CD]$. On pose $DQ = x$ et $BP = y$. Montrer que APQ est équilatéral si et seulement si $\begin{cases} x = 2a - b\sqrt{3} \\ y = 2b - a\sqrt{3} \end{cases}$

   Indication : utiliser les affixes, et une rotation de centre A.

2) En déduire que le problème a une solution si et seulement si $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leq \dfrac{a}{b} \leq \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ et qu'alors elle est unique.

3) On suppose que le problème posé admet une solution. On construit les triangles équilatéraux BCI et CDJ, comme indiqué figure 2. Soit P le point d'intersection des droites (AJ) et (BC), et Q le point d'intersection des droites (AI) et (CD). Montrer que APQ est le triangle équilatéral cherché.

   En déduire une construction du triangle APQ à la règle et au compas.

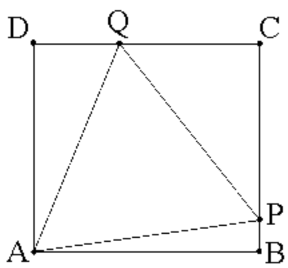

fig.1

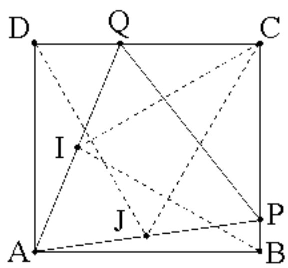

fig.2

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

$Q.1$) Dégagez les méthodes et outils nécessaires à la résolution de cet exercice.

$Q.2$) En utilisant l'environnement de géométrie dynamique de la calculatrice, construire le rectangle $ABCD$ et le triangle équilatéral APQ (quand il existe). Animer la figure de façon à voir les conditions limites entre lesquelles le problème posé admet une solution.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

– Sa réponse à la question $Q.1$).
– Un ou deux énoncés d'exercices se rapportant au thème « **Géométrie : nombres complexes** ».

3. Quelques références aux programmes

Classe de Term S (enseignement obligatoire).

Contenus	**Modalités de mise en oeuvre**	**Commentaires**
Géométrie plane : nombres complexes		
Le plan complexe : affixe d'un point ; parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe. Conjugué d'un nombre complexe. Somme, produit, quotient de nombres complexes.	Le vocabulaire sera introduit à partir de considérations géométriques.	La vision des nombres complexes est d'abord géométrique : calculs sur des points du plan. Les repérages cartésien et polaire introduits en première conduisent naturellement à deux écritures d'un nombre complexe.
Module et argument d'un nombre complexe ; module et argument d'un produit, d'un quotient. Écriture $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. Résolution dans $\mathbb{C}$ des équations du second degré à coefficients réels.	On retrouvera à cette occasion la notion de coordonnées polaires et celle, sous -jacente, d'équation paramétrique d'un cercle (sous la forme $z = z_\omega + re^{i\theta}$ ou $x = x_\omega + r\cos\theta, y = y_\omega + r\sin\theta$). La notation exponentielle sera introduite après avoir montré que la fonction $\theta \mapsto \cos\theta + i\sin\theta$ vérifie l'équation fonctionnelle caractéristique des fonctions exponentielles.	L'objectif est ensuite de montrer la puissance de ce calcul dans les problèmes de géométrie. On introduira dans ce chapitre quelques éléments lui donnant une dimension historique. Les nombres complexes permettent de retrouver et de mémoriser les formules trigonométriques d'addition et de duplication vues en première.
Interprétation géométrique de $z \mapsto z'$ avec $z' = z + b$ ou $z' - w = k(z - w)$ avec k réel non nul, ou $z' - w = e^{i\theta}(z - w)$.	On utilisera les nombres complexes pour traiter des exemples simples de configurations et résoudre des problèmes faisant intervenir des translations, des rotations, des homothéties.	On exploitera à la fois les possibilités offertes par les nombres complexes et les raisonnements géométriques directs qui réactivent les connaissances antérieures, notamment sur les transf$^{\text{ns}}$ du plan.