Dossier 40-05 *Sujet 2011*

Thème : équations différentielles

L'exercice

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + y = 8e^x$ où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1) Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_0) : $y'' - 2y' + y = 0$.
2) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 4x^2e^x$. Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

Extrait du formulaire BTS (groupement A) : équations différentielles

Équations	Solutions sur un intervalle I
$ax'' + bx' + cx = 0$	si $\Delta > 0$, $f(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique
équation carctéristique	si $\Delta = 0$, $f(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$ où r est la racine double de l'équation caractéristique
$ar^2 + br + c = 0$	si $\Delta < 0$, $f(t) = (\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t))e^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ sont les
de discriminant Δ	racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique

La réponse d'un étudiant de section de technicien supérieur

1) On reconnaît $ax'' + bx' + cx = 0$ avec $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 = 0$$

donc $x = \dfrac{b}{2a} = \dfrac{2}{2} = 1$.
Donc $f(t) = (\lambda t + \mu)e^t$ d'après le formulaire.
2) $h'(x) = 8xe^x$ et $h''(x) = 8e^x$.

$$8e^x - 2 \times 8xe^x + 4x^2e^x =$$

On doit trouver 0 mais ça ne marche pas. Je prends le résultat pour la question 3.
3) $y'' - 2y' + y = 8e^x = h''(x) - 2h'(x) + h(x)$
donc $y'' - h''(x) - 2y' + 2h'(x) + y - h(x) = 0$
donc $y = (\lambda t + \mu)e^t + 4x^2e^x$ c'est les solutions de l'équation.

Le travail à exposer devant le jury

1- Analysez la production de l'étudiant en mettant en évidence les différents types d'erreurs que vous relevez.

2- Proposez une correction de la question 3) telle que vous l'exposeriez devant une classe de STS (section de technicien supérieur).

3- Présentez deux ou trois exercices qui conduisent à la résolution d'une équation différentielle.