Thème : Analyse
Équations différentielles

1. L'exercice proposé au candidat

Dans cet exercice on se propose de rechercher, s'il en existe, des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition :

$$(C)\ :\ \begin{cases} \text{pour tout réel } x,\ f(-x)f'(x) = 1 \\ f(0) = -4 \end{cases}$$

1) Dans cette question, on suppose qu'il existe une fonction f satisfaisant la condition (C). On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = f(-x)f(x).$$

a) Démontrer que la fonction g est constante et déterminer sa valeur.

b) Montrer alors que la fonction f est solution de l'équation différentielle :

$$(E)\ :\ \begin{cases} y' = \dfrac{1}{16}y \\ y(0) = -4 \end{cases}$$

2) En déduire les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition (C).

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Le candidat rédigera sur ses fiches :

◇ sa solution de la question 2) ;

◇ un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Équations différentielles** ».

Le candidat présentera au jury :

– le contenu de ses fiches ;

– les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

3. Quelques références aux programmes

Classe de Terminale STI

d) Équations differentielles

Résolution de l'équation différentielle $y' = ay$, où a est un nombre réel : existence et unicité de la solution vérifiant une condition initiale donnée.

Résolution de l'équation différentielle $y'' = -\omega^2 y$ où ω est un nombre réel : existence et unicité (admises) de la solution vérifiant des conditions initiales données.

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
Équations différentielles	Exemples simples d'étude de phénomènes continus satisfaisant à une loi d'évolution et à une condition initiale se ramenant à une équation du type $y' = ay$ ou $y'' = -\omega^2 y$.	Certaines de ces situations seront issues des sciences physiques (mécanique du point, circuits électriques...). Lorsqu'une telle étude mène à une équation avec second membre, la méthode à suivre pour se ramener à l'équation sans second membre doit être indiquée. D'autre part, dans certaines sections, en liaison avec l'enseignement d'autres disciplines, on pourra être amené à étudier d'autres types d'équations différentielles mais ceci est en dehors du programme de mathématiques.

Classe de Terminale S

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
Introduction de la fonction exponentielle Étude de l'équation $f' = kf$. Théorème : « Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. » Relation fonctionnelle caractéristique. Introduction du nombre e. Notation e^x. Extension du théorème pour l'équation $f' = kf$.	L'étude de ce problème pourra être motivée par un ou deux exemples, dont celui de la radioactivité traité en physique, ou par la recherche des fonctions dérivables f telles que $f(x + y) = f(x)f(y)$. On construira avec la méthode d'Euler introduite en première des représentations graphiques approchées de f dans le cas $k = 1$; on comparera divers tracés obtenus avec des pas de plus en plus petits. L'unicité sera démontrée. L'existence sera admise dans un premier temps. Elle sera établie ultérieurement à l'occasion de la quadrature de l'hyperbole. Approximation affine, au voisinage de 0, de $h \mapsto \mathrm{e}^h$.	Ce travail se fera très tôt dans l'année car il est central dans le programme de mathématiques et de physique. Il fournit un premier contact avec la notion d'équation différentielle et montre comment étudier une fonction dont on ne connaît pas une formule explicite. La méthode d'Euler fait apparaître une suite géométrique et donne l'idée que l'exponentielle est l'analogue continu de la notion de suite géométrique, ce que l'équation fonctionnelle confirme.