

Thème : Intégration
Utilisation du calcul intégral pour l'étude de suites

1. L'exercice proposé au candidat

On considère la suite de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

1) Montrer que, pour $n \geq 1$ et $k \geq 1$:

$$\int_{n+k}^{n+k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{n+k} \leq \int_{n+k-1}^{n+k} \frac{1}{t} dt.$$

2) En déduire un encadrement de u_n , puis étudier la limite de la suite (u_n) .

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Après avoir résolu et analysé cet exercice :

1. Quelles propriétés de l'intégrale sont-elles utilisées dans cet exercice?
2. Pourquoi n'a-t-on pas pris la suite

$$u_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}^*) ?$$

3. Le choix de la suite (u_n) pris dans l'exercice est-il judicieux?
4. Proposer un autre exercice sur le même thème mais portant sur un autre type de suite (i.e. pas définie par une sommation).