Thème : Intégration

1. L'exercice proposé au candidat

L'exercice a pour objet d'étudier la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par :

$$I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n \, \mathrm{d}x.$$

1) Calculer I_1 et montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n.$$

2) a) À l'aide d'une calculatrice, donner une conjecture sur le sens de variation et la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   b) Démontrer les propriétés conjecturées à la question 2) a).

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury.

Pendant sa préparation le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Indiquer, pour chaque question de l'exercice, les savoirs mis en jeu.

Q.2) Présenter une solution de la question 2).

Sur ses fiches le candidat rédigera et présentera :

a) Sa réponse à la question **Q.2)**.

b) Un ou plusieurs exercices se rapportant au thème « **Intégration** ».

3. Quelques références aux programmes

Programme de terminale scientifique

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
Intégration		
Pour une fonction f continue positive sur $[a, b]$, introduction de la notation $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ comme aire sous la courbe. Valeur moyenne d'une telle fonction.	On indiquera que l'aire sous la courbe peut être approchée en l'encadrant par deux suites adjacentes construites en quadrillant le plan de plus en plus finement. Exemple où la fonction intégrée est en escalier. Exemple de la parabole : on fera apparaître l'intégrale comme limite de sommes et on admettra que cette situation est généralisable.	Les élèves ont une notion intuitive d'aire (avec la propriété d'additivité) et savent calculer certaines aires élémentaires ; l'objectif est de leur donner un aperçu de la définition et du calcul de l'aire de domaines plans liés aux fonctions ; tout développement théorique est exclu.
Extension à l'intégrale et à la valeur moyenne d'une fonction de signe quelconque	On indiquera la convention de signe sur un intervalle où f est négative et on en déduira le cas général ; on pourra aussi ajouter une constante à f pour la rendre positive.	Cette extension doit être faite brièvement. Cette convention de signe prendra tout son sens lors de l'étude de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
Linéarité, positivité, ordre, relation de Chasles. Inégalité de la moyenne.	On interprétera ces propriétés en terme d'aire ou en terme de valeur moyenne pour les rendre conformes à l'intuition. On illustrera l'intérêt de l'intégrale par diverses situations, entre autres : – expression intégrale de la distance parcourue sur une droite par un point mobile dont on connaît la vitesse instantanée ; – expression intégrale du volume d'un solide dont on connaît les aires des sections avec les plans d'équation $z =$ constante ; – calculs de probabilités d'intervalles pour des lois de probabilités à densité.	Les propriétés générales de l'intégrale seront rapidement commentées et admises ; les élèves s'en serviront comme règles opératoires. Ce travail est une façon de préparer le théorème liant intégrales et primitives, particulièrement frappant dans le cas du point mobile. Aucune connaissance théorique n'est exigible sur ces activités de modélisation. Dans les problèmes, les expressions intégrales seront toujours données. En lien avec la physique, on mentionnera le problème des unités : si x et y sont deux grandeurs liées par une relation $y = f(x)$, l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est une grandeur homogène au produit des grandeurs xy tandis que la valeur moyenne est homogène à y.
Intégration et dérivation		
Notion de primitive Théorème : Si f est continue sur un intervalle I, et si a est un point de I, la fonction F telle que $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a.	On démontrera que F est une primitive de f dans le cas où f est continue et croissante, et on admettra le cas général.	L'intégration permet d'établir l'existence des primitives des fonctions continues et d'en donner des méthodes numériques de calcul ; inversement, la connaissance d'une primitive d'une fonction continue donne une formule explicite pour le calcul des intégrales : les élèves devront percevoir l'intérêt de cette double démarche.