**Thème : Fonctions**
**Etude d'encadrement d'une fonction par des fonctions plus simples**

### 1. L'exercice proposé au candidat

On considère la fonction numérique $f$ de la variable réelle $x$ définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x} \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1. Etudier les variations des fonctions $g$ et $h$ définies sur l'ensemble des réels respectivement par :

$$g(x) = x - \sin(x) \quad \text{et} \quad h(x) = x - \frac{x^3}{6} - \sin(x)$$

2. Déterminer le signe de ces deux fonctions sur $[0;+\infty[$ .
3. Prouver que pour tout $x$ réel positif on a : $0 \leqslant x - \sin(x) \leqslant \dfrac{x^3}{6}$
4. Démontrer que pour tout réel $x$ strictement positif on a : $-\dfrac{x}{6} \leqslant \dfrac{f(x) - f(0)}{x} \leqslant 0$.
   Que peut-on en déduire pour $f$ ?

### 2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

**Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :**

$Q.1)$ Analyser la méthode utilisée dans cet exercice.

$Q.2)$ Proposer une nouvelle formulation de la première question pour faciliter sa résolution par des élèves de lycée.

**Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :**

- Sa réponse à la question $Q.2)$
- Un ou plusieurs exercices sur le thème « **Fonctions : Etude d'encadrement d'une fonction par des fonctions plus simples** ».

### 3. Quelques références aux programmes

**Classe de Première S**

| Contenus | Modalités de mise en œuvre | Commentaires |
|---|---|---|
| Nombre dérivé d'une fonction en un point : définition comme limite de $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand $h$ tend vers 0. Fonction dérivée. Tangente à la courbe représentative d'une fonction $f$ dérivable ; approximation affine associée à la fonction. | | Dans les cas usuels, la limite de $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ s'obtient après transformation d'écriture, en invoquant des arguments très proches de l'intuition. On ne soulèvera aucune difficulté à leurpropos et on admettra tous les résultats utiles. La notion de développement limité à l'ordre 1 n'est pas au programme. On pourra cependant évoquer le caractère optimal de l'approximation affine liée à la dérivée. |

**Classe de Terminale S**

| Contenus | Modalités de mise en œuvre | Commentaires |
|---|---|---|
| Rappel de la définition de la limite d'une suite. Extension à la limite finie ou infinie d'une fonction en $+\infty$ ou $-\infty$. | Pour exprimer que $f(x)$ tend vers $L$ quand $x$ tend vers $+\infty$, on dira que : « tout intervalle ouvert contenant $L$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ assez grand ». | Il s'agit de prolonger le travail fait en première sur les suites. L'expression « pour $x$ assez grand" est l'analogue pour les fonctions de l'expression »à partir d'un certain rang" pour les suites. |
| Notion de limite finie ou infinie d'une fonction en un réel $a$. | On montrera qu'une suite croissante non majorée tend vers l'infini. On reverra à cette occasion la notion d'asymptote oblique, en se limitant aux fonctions se mettant sous la forme $ax+b+h(x)$, où $h$ est une fonction tendant vers 0 à l'infini. On montrera sur des exemples que l'étude sur calculatrice ou sur tableur d'une suite ou d'une fonction permet de conjecturer des limites qui devront ensuite être justifiées. | Pour les limites en un réel $a$, aucune définition n'est exigée : on reprendra l'approche intuitive adoptée en classe de première. Sur un exemple, on fera le lien entre limite en un réel $a$ et à l'infini. On pourra parler de limite à droite ou à gauche à l'occasion de certains exemples. |
| Théorème « des gendarmes »pour les fonctions. | On démontrera ce théorème lorsque la variable tend vers l'infini. On étendra ce théorème au cas des limites infinies. | |